

中外物理学精品书系

前沿系列 · 21

CP不守恒

杜东生　编著



中外物理学精品书系·前沿系列21

CP 不守恒

杜东生 1964 年毕业于北京大学技术物理系。1968 年中国科学院原子能研究所理论物理研究生毕业。1985 年起任中国科学院高能物理研究所研究员、博士生导师。曾在日内瓦欧洲核子中心(CERN)和美国普林斯顿高等研究院(IAS)从事粒子物理研究工作。历任中国科学院高能物理研究所理论物理研究室主任、学位委员会主任、学术委员会主任，正负电子对撞机国家实验室物理委员会主任等职。长期从事粒子物理的理论研究。主要研究领域有层子模型、大统一理论、重味物理和 *CP* 不守恒、QCD 和弱电标准模型唯象研究等。在重味物理和 *CP* 不守恒方面做出了有国际影响的工作。创办了科普杂志《高能物理》（后更名为《现代物理知识》），并为该杂志撰写了大量普及高能物理知识的文章。


ISBN 978-7-301-22372-7
9 787301 223727 >
定价：29.00元



中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 21

CP不守恒

杜东生 编著


北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

CP 不守恒/杜东生编著．—北京：北京大学出版社，2013.5
(中外物理学精品书系·前沿系列)
ISBN 978-7-301-22372-7
Ⅰ.①*CP*…　Ⅱ.①杜…　Ⅲ.①粒子物理学—对称变换—研究　Ⅳ.①O572.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 070613 号

书　　　名：**CP 不守恒**
著作责任者：杜东生　编著
责 任 编 辑：刘　啸
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-22372-7/O·0921
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn
新 浪 微 博：@北京大学出版社
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752038
出版部 62754962
印　刷　者：北京中科印刷有限公司
经　销　者：新华书店
730 毫米×980 毫米　16 开本　10.75 印张　205 千字
2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
定　　　价：29.00 元

“中外物理学精品书系”
编　委　会

序　　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套“中外物理学精品书系”的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会　主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内 容 简 介

本书首先系统介绍了分立变换的物理思想和相应的数学描述.在此基础上,本书详细讨论了标准模型下的 CP 破坏机制,回顾了实验上首次在中性 K 介子衰变中发现 CP 不守恒的历史,并给出了中性 K 介子到两 π 衰变的 CP 破坏的理论描述.此后,本书重点讨论了 B^0-$\bar{B}^0$ 混合的实验结果和理论描述,建造 B 工厂的必要性,B 介子弱衰变中 CP 破坏的理论计算方法和实验测量,以及幺正三角形实验测量的最新结果等.在讨论了 D^0-$\bar{D}^0$ 混合的实验结果之后,本书深入讨论了粲粒子系统 CP 破坏及其实验检验的困难所在.此外,本书还详细讨论了中微子振荡和中微子系统中 CP 破坏的实验观测,其中包括中微子振荡的实验证据、理论描述,狄拉克中微子和马约拉纳中微子的区别,以及中微子振荡实验中观测 CP 破坏的可能性等内容.最后,本书还介绍了超出标准模型的新的 CP 破坏机制.

本书努力结合最新的实验成果和理论前沿,目的是使初学者能够与国际最新发展接轨.本书适合粒子物理、场论等方向的研究人员参考,同时也可用作该领域研究生的指导书.

前　言

本书是对作者在2000年北京大学暑期讲习班上的系统讲演加以扩充整理写成的. 当时讲演的对象是全国各高校及科研单位的在校研究生、青年教师和青年研究人员,目的是把年轻人带入 CP 不守恒的研究领域的前沿.

十多年来,这一领域已发生了很大变化,理论和实验研究都有了很大的发展. 虽然本书的目标与讲习班的目标一致,但仍须补充不少新内容和新的实验结果. 随着时间的推移和新成果的不断涌现,前沿课题也会更改,但基本的东西不会变. 作者衷心希望本书能成为引领后来者入门的书.

作者写本书的指导思想是简洁易懂又不失深入和贴近前沿. 本书力求避免冗长的推导,希望把读者尽快地带到科学研究的第一线. 如果真能达此目的,作者就十分欣慰了.

在本书写作过程中,作者曾多次与邢志忠教授、吕才典教授和李海波教授做过深入的讨论. 吕才典教授对本书内容提出过不少好的修改意见,使本书内容更适合高年级研究生阅读. 这里特向以上三位教授表示衷心的感谢. 作者还感谢孙俊峰、刘纯、邢志忠、朱国怀、杨德山、杨茂志、杨亚东、李竞武、张大新、郭立波、魏正涛、戴又善等各位教授的合作. 在重味物理与 CP 不守恒领域的研究工作中,我们一起度过了许多令人激动的日日夜夜. 正是这些合作研究,使作者对本书所涉及的领域有了更深入的理解.

当前对标准模型乃至非标准模型的理论研究和实验检验都在紧锣密鼓地进行. LHC 上发现了质量为 125 GeV 左右的标量粒子,很可能是 Higgs 粒子. 对 B 介子衰变和粲粒子衰变及 CP 破坏的研究也正在开展,不久会有新结果问世. 超级 B 工厂(super B factory)正在兴起,BEPCⅡ上的粲粒子实验也正在加紧取数. 因此,本书的实验结果随时可能更新. 希望读者在读本书时能密切关注实验和理论的新发展.

由于时间有限和作者水平的原因,书中定有不少缺点和不足,甚至还可能有错误之处,望读者给予指正,本人不胜感激.

杜东生

2013 年 1 月

于中国科学院高能物理研究所

目　录

第一章　物理学中的对称性

对称性在物理学的研究中起着重要作用，是人类了解和研究自然规律的强有力的工具. 今天我们知道，有些对称性是严格的，但有些对称性只在一定的条件下成立，我们称这类对称性为破缺对称(broken symmetry). 对称性的分类有不同的方法，其中一种是把对称性分为四类[1]：

(1) 置换对称性.

如全同粒子交换对称，导致玻色-爱因斯坦(Bose-Einstein)统计；全同粒子交换反对称，导致费米-狄拉克(Fermi-Dirac)统计.

(2) 连续时空对称性.

如空间转动对称性，即空间的各向同性，导致角动量守恒；时间、空间的平移不变性，即时空的均匀性，导致能量动量守恒.

(3) 分立对称性.

如空间左右对称，即空间反射 $P(\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x})$ 对称性，导致宇称守恒；时间反演 $T(t \to -t)$ 对称性，导致过去未来的对称；电荷共轭 C 不变性，即正、反粒子变换的不变性；乘积对称 CP,CPT 也属此类.

(4) 幺正对称性.

如 U(1)整体规范对称性(global gauge symmetry)，即理论在整体 U(1)群变换 $e^{iQ\theta}$ 下不变，也就是当场量 $\phi_i(x) \to \phi_i'(x) = e^{iQ\theta}\phi_i(x)$ 时的不变性，导致某个量子数守恒. 其中 θ 与时空坐标无关. 例如，电荷守恒、重子数守恒、轻子数守恒都属于这一类. 还有整体 SU(2)(即同位旋)，整体 SU(3)等对称性，如夸克模型的 SU(3)味对称性等.

在整体规范对称性之外，还有定域规范对称性(local gauge symmetry). 此时，上述对称性的群参数 θ 与时空坐标有关. 如：

U(1)，　$e^{iQ\theta(x)}$，

SU(2)，$e^{i\frac{1}{2}\tau_i\theta_i(x)}$，$\tau_i(i=1,2,3)$为泡利(Pauli)矩阵，

U(3)，　$e^{i\frac{1}{2}\lambda_i\theta_i(x)}$，$\lambda_i(i=1,\cdots,8)$为盖尔曼(Gell-Mann)矩阵，

⋮　　⋮　　⋮

还有另一种分类方法，把各种对称性分为两类：

(1) 时空对称性.

① 连续时空对称性：空间转动不变性，时间和空间平移不变性.

② 分立时空对称性：空间反射（左右）对称性，时间反演对称性．

(2) 内禀对称性．

这是指物理系统内部的对称性．其中包括：

① 分立对称性：置换对称性，电荷共轭对称性．

② 连续对称性：整体规范对称性，包括 U(1)，SU(2)，SU(3)等；定域规范对称性，包括 U(1)及 SU(N)等．

例如，量子电动力学（QED）满足 U(1)定域规范对称性，该对称保证了光子质量为零．量子色动力学（QCD）具有 SU(3)非阿贝尔定域规范对称性，保证了胶子质量为零．

整体规范对称和定域规范对称之所以归入连续对称，是因为它们的群元素的参数 θ 和 $\theta(x)$ 都是可以连续变化的．

现在来讨论对称性的破缺问题．

自然界的许多对称性是严格的．如空间转动对称性（角动量守恒），时空的平移不变性（能量、动量守恒），强相互作用 SU(3) 定域规范对称性，电荷守恒对应的 U(1)整体规范对称性和 QED 对应的 U(1)定域规范对称性都是严格的，至今未发现任何破坏的迹象．但有些对称性不是严格保持的，在某些条件下会被破坏．对称性破缺的发现使我们对物质世界的多样性和自然界的奥妙有了更深刻的认识．因此在某种意义上说，对称性的破缺有时更重要．

1957 年，根据李政道和杨振宁的建议[2]，吴健雄实验组在实验中首次发现了弱相互作用中宇称不守恒（左、右不对称，即空间反射 P 不守恒）[3]．这推翻了科学家们多年来一直认为宇称守恒的观念，使人们能正确地建立弱相互作用的理论，从而对弱相互作用的性质有了更深入的理解和掌握．

由于弱作用诱导的 β 衰变只能产生左手中微子和右手反中微子，这破坏了正反粒子变换的不变性，即破坏了电荷共轭变换 C 的不变性，所以在弱相互作用中，P 和 C 单独守恒都被破坏了．但 CP 联合变换在 β 衰变中仍然保持守恒．直到 1964 年，在实验中观察到了 $K_L^0 \to 2\pi$ 衰变时人们才发现，CP 在某些弱作用过程中也不守恒[4]．

1998 年，坐落在日内瓦的欧洲核子研究中心（CERN）在质子-反质子储存环内观察到了直接的时间反演不变性的破坏[5]．而几乎同时，美国费米实验室（Fermilab）也在测量 $K_L \to \pi^+\pi^-e^+e^-$ 角关联实验中看到了时间反演不变性的直接破坏[6]．

物理学家多年坚信的 CPT 不变性是否也会遭到破坏呢？如果是，人类对自然规律的认识将会有重大修改．我们习惯使用的，也被无数实验证实是正确的定域场论也将要被修改．随之而来的是，非定域相互作用的理论研究不得不回到议事

日程上来．目前意大利的 ϕ 介子工厂的最重要的实验之一就是检验 CPT 不变性是否被破坏．

须指出，目前在 K 介子和 B 介子系统中观测到的 CP 破坏现象完全可以在标准模型框架内得到解释．但目前已观测到的 CP 破坏的强度对于产生宇宙中的重子-反重子不对称来说还是太小了．在当今宇宙中，我们只观测到了物质(重子)，还没有发现反物质(由反重子组成)，只在宇宙线中看到少量反质子，以及在实验中可以用人工方法(如加速器加速的质子等粒子轰击靶)产生少量反重子．

早期宇宙中，产生重子-反重子不对称性的萨哈罗夫(Sakharov)三条件是[7]：

(1) 重子数不守恒．否则就不会产生宇宙初始态和现在状态重子数的不同．

(2) CP 不守恒．对一个重子数改变过程 $N\to f$，它的 CP 共轭过程为 $\bar{N}\to\bar{f}$. 要想重子数不对称 $N\neq\bar{N}$ 能永远保持，则上述两过程的几率必须不同．这要求 CP 不守恒．

(3) 只要 CPT 不变性保持，重子数改变过程 $N\to f$，$\bar{N}\to\bar{f}$ 和 CP 不守恒必须在非平衡态进行．否则，宇宙初始就处于平衡态，状态与时间无关，T 不变，则 CPT 不变意味着 CP 不变，破坏了条件(2)．这是不允许的．

既然标准模型框架下产生的 CP 破坏强度不能满足早期宇宙产生重子-反重子不对称的要求，可能就得寻找超出标准模型的新的 CP 破坏机制．当然，如果 CPT 不变性遭到破坏，或者我们找到了比萨哈罗夫更好的理论来产生重子-反重子不对称性而不需要大强度的 CP 破坏，则另当别论．

在 QCD 理论中我们已经知道，三角反常的存在使得 QCD 拉氏量中多出一项，

$$\mathscr{L}_\theta(x)=\frac{\theta}{8\pi}\alpha_s \mathrm{Tr}G^a_{\mu\nu}(x)\widetilde{G}^{\mu\nu}_a(x),$$

这里 $G^a_{\mu\nu}(x)$ 是胶子的场强张量($a=1,2,\cdots,8$)．$\mathscr{L}_\theta(x)$ 的存在导致中子的电偶极矩 $d_n\neq0$，非零 d_n 的存在将破坏 P 和 T 不变性．若 CPT 不变(这点在很高精度上是成立的)，则 T 破坏意味着 CP 也破坏了．目前实验给定的 d_n 的上限为 $|d_n|<1.1\times10^{-25}\mathrm{e\cdot cm}$，这将导致 $|\bar{\theta}|<2\times10^{-10}$．这里 $\bar{\theta}$ 是重整化后的 θ．$|\bar{\theta}|$ 为什么这么小？这就是所谓的“强 CP 问题”．Peccei 和 Quinn 引入一个 U(1)对称性来解决这个问题，但这将导致一个轻的赝标介子——axion 的存在．这个 axion 介子的质量比电子的质量还小很多．迄今为止，所有寻找 axion 的实验都没有成功．

在以下的章节中，我们将重点讨论分立对称，特别是讨论与 CP 对称性及其破坏相关的各种问题．

参 考 文 献

[1] 李政道．场论与粒子物理学．北京：科学出版社，1980.

[2] Lee T D, Yang C N. Phys. Rev., 1956, 104: 254.

[3] Wu C S, Ambler E, Hayward R W, et al. Phys. Rev., 1957, 105: 1413. Garwin R L, Lederman L M, Weinrich M. Phys. Rev., 1957, 105: 1415. Telegdi V L, Friedman A M. Phys. Rev., 1957, 105: 1618.

[4] Christenson J H, Cronin J W, Fitch V L, et al. Phys. Rev. Lett., 1964, 13: 138.

[5] Angelopoulos A, et al. (CPLEAR Collaboration). Phys. Lett. B, 1998, 444: 43.

[6] Cox B (for KTeV Collaboration). Talk given at the International Workshop on CP Violation in K, Tokyo, Japan. 18-19 Dec. 1998.

[7] Sakharov A D. JEPT Lett., 1967, 5: 24.

第二章 分立变换 P, C, T, CP 及 CPT

本章讨论分立变换的性质及部分应用．对于场论中分立变换的许多公式，因篇幅所限，我们并不详细证明，而只是引用文献中的结果．读者如有需要，可参阅相应的教科书和专著，如本章的参考文献[1-3].

§2.1 空间反射 P

空间反射 P 是将空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 变为 $-\boldsymbol{x}$ 的变换，又称宇称变换或左右变换．实际上 P 是将左手坐标系变成右手坐标系，或将物体变为它的镜子里的像的一种变换．日常生活中人的左手和右手长得相当对称，许多动物的肢体也是左右对称的．当然如果细看，左右手还有些轻微的不对称．左右脚的大小也有轻微的不对称．这个轻微的不对称是由生活环境造成的偶然不对称．因此科学家们推测，微观世界的自然规律应当是左右对称的，而宇称是守恒的，或是 P 变换不变的．宇称守恒多年来一直被当作一个物理规律的选择定则来研究各种电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用物理过程．直到 1956 年，宇称在弱相互作用过程中也守恒才受到了李政道和杨振宁的质疑[4].

事情起源于 1947 年宇宙线实验发现的 τ-θ 疑难[5]．实验上发现，两个粒子 θ^+ 和 τ^+ 质量相同，但却衰变到两个宇称不同的末态：

$$\theta^+ \to \pi^+ \pi^0 \text{（宇称为正）},$$
$$\tau^+ \to \pi^+ \pi^- \pi^+ \text{（宇称为负）}.$$

如果假定弱衰变中宇称不守恒，则可认为 θ^+，τ^+ 是同一个粒子 K^+．而宇称守恒在弱相互作用过程中从来没有被实验证实过．吴健雄等人利用超低温下极化的 ^{60}Co 原子核的 β 衰变证实了宇称在弱衰变中不守恒[6]．李政道和杨振宁因此而获得了诺贝尔物理学奖．宇称不守恒的发现使我们对弱相互作用有了更深刻的认识，引导科学家提出了正确的弱相互作用理论——V-A 理论（详见第三章）．

在量子力学中，薛定谔方程(Schrödinger equation)为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle = H|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle. \tag{2.1}$$

其中，哈密顿量 H 为（假定只依赖于 $|\boldsymbol{x}|$）

$$H=\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m}+V(|\boldsymbol{x}|). \tag{2.2}$$

假定空间反射变换 P 是一个幺正变换，即 $P^{\dagger}=P^{-1}$，且与哈密顿量 H 对易，

$$[P,H]=0, \tag{2.3}$$

则薛定谔方程(2.1)在空间反射下不变，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}P|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle=PH|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle=HP|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle, \tag{2.4}$$

空间反射后的态 $P|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle$ 满足同样的方程．

另外，对易关系

$$[x_i,p_j]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ij} \tag{2.5}$$

也是空间反射不变的，只要满足

$$\begin{aligned}P\boldsymbol{x}P^{-1}&=-\boldsymbol{x},\\ P\boldsymbol{p}P^{-1}&=-\boldsymbol{p}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

态 $P|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle$ 可取为 $|\psi(-\boldsymbol{x},t)\rangle$，即

$$P|\psi(\boldsymbol{x},t)\rangle=|\psi(-\boldsymbol{x},t)\rangle. \tag{2.7}$$

(2.7)式右端前面可有一任意位相 $e^{i\delta}$.

由以上的论述可见，这个量子系统在空间反射下不变，即运动方程和对易关系都是不变的．

在量子场论中，假定在空间反射下粒子场按如下的方式变换：

$$\begin{aligned}
&\text{标量场，} && \phi(\boldsymbol{x},t)\to P\phi(\boldsymbol{x},t)P^{-1}=\phi(-\boldsymbol{x},t);\\
&\text{赝标量场，} && \varphi(\boldsymbol{x},t)\to P\varphi(\boldsymbol{x},t)P^{-1}=-\varphi(-\boldsymbol{x},t);\\
&\text{旋量场，} && \psi(\boldsymbol{x},t)\to P\psi(\boldsymbol{x},t)P^{-1}=\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x},t),\\
& && \bar\psi(\boldsymbol{x},t)\to P\bar\psi(\boldsymbol{x},t)P^{-1}=\bar\psi(-\boldsymbol{x},t)\gamma^0;\\
&\text{矢量场，} && V_\mu(\boldsymbol{x},t)\to PV_\mu(\boldsymbol{x},t)P^{-1}=V^\mu(-\boldsymbol{x},t);\\
&\text{轴矢量场，} && A_\mu(\boldsymbol{x},t)\to PA_\mu(\boldsymbol{x},t)P^{-1}=-A^\mu(-\boldsymbol{x},t).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

这里 P 为希尔伯特(Hilbert)空间的算符，可用场的产生湮没算符表示，具体形式可参阅李政道和 Bjorken-Drell 的书[1]和[3]．上下指标的升降用 Bjorken-Drell 度规，γ 矩阵也采用该书的表示．

由(2.8)式可给出如下的双线型在 P 变换下的性质，其中，ψ, $\bar\psi$ 中的时空坐标 $(\boldsymbol{x},t)\to(-\boldsymbol{x},t)$.

$$
\begin{aligned}
&\text{坐标，} && (\boldsymbol{x},t)\to(-\boldsymbol{x},t);\\
&\text{标量，} && \bar{\psi}_1\psi_2\to\bar{\psi}_1\psi_2;\\
&\text{赝标量，} && \bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2\to-\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2;\\
&\text{矢量，} && \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2\to\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2;\\
&\text{轴矢量，} && \bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2\to-\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2;\\
&\text{张量，} && \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\to\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

利用(2.8)，(2.9)式容易证明，量子电动力学(QED)拉氏量及作用量在 P 变换下不变，场算子的对易关系也满足 P 变换下的不变性．如果不考虑反常项

$$\frac{\theta}{8\pi}\alpha_s \mathrm{Tr}G^a_{\mu\nu}(x)\tilde{G}^{\mu\nu}_a(x),$$

则 QCD 拉氏量和作用量也满足 P 变换的不变性．详细证明也可参阅文献[1]，[3].

§2.2 电荷共轭变换 C

电荷共轭变换又称正反粒子共轭变换．这个变换本质上属于相对论量子场论的范畴，因为非相对论量子力学中没有反粒子的概念．

考虑弱衰变 $\pi^+\to e^+\nu_e$ 和 $\pi^-\to e^-\bar{\nu}_e$. 图 2.1 给出了这两个过程在 $\pi^\pm$ 质心系的示意图．

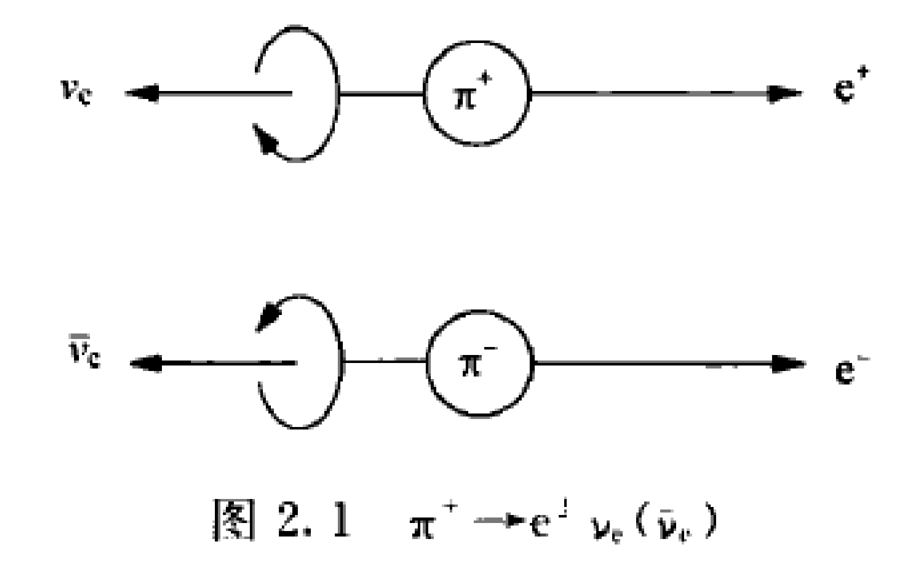


图 2.1 $\pi^\pm\to e^\pm\nu_e(\bar{\nu}_e)$

我们知道这两个过程宇称是不守恒的(见文献[6]中 R. L. Garwin et al. 的实验)．电荷共轭 C 也不守恒，原因是将 $\pi^+\to e^+\nu_e$ 做电荷共轭变换时应当给出左旋的 $\bar{\nu}_e$(C 不改变自旋)，但实际上 $\bar{\nu}_e$ 只有右旋态．但如果在做 C 变换时同时也作 P 变换(左手⟷右手)，则 CP 似乎可以守恒．当然，在 $K_L\to2\pi$ 时 CP 不守恒[7].

在量子场论中，假定场算符满足如下的电荷共轭变换关系：

$$
\begin{aligned}
&\text{标量场,} && \phi(x)\to C\phi(x)C^{-1}=\phi^{\dagger}(x);\\
&\text{赝标量场,} && \varphi(x)\to C\varphi(x)C^{-1}=\varphi^{\dagger}(x);\\
&\text{旋量场,} && \psi(x)\to C\psi(x)C^{-1}=\mathscr{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x),\\
& && \bar{\psi}(x)\to C\bar{\psi}(x)C^{-1}=\psi^{\mathrm{T}}(x)\mathscr{C}^{-1};\\
&\text{矢量场,} && V_{\mu}(x)\to CV_{\mu}(x)C^{-1}=-V_{\mu}^{\dagger}(x);\\
&\text{轴矢量场,} && A_{\mu}(x)\to CA_{\mu}(x)C^{-1}=A_{\mu}^{\dagger}(x).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

其中,C 为希尔伯特空间算子[3],而

$$
\mathscr{C}=\mathrm{i}\gamma^{2}\gamma^{0},\mathscr{C}^{-1}\gamma_{\mu}\mathscr{C}=-\gamma_{\mu}{}^{\mathrm{T}},\mathscr{C}^{-1}=\mathscr{C}^{\dagger}=\mathscr{C}^{\mathrm{T}}=-\mathscr{C}. \tag{2.11}
$$

由(2.10),(2.11)式可推出双线型在 C 变换下的性质(时空坐标 $x\to x$ 不改变):

$$
\begin{aligned}
&\text{标量,} && \bar{\psi}_1\psi_2\to\bar{\psi}_2\psi_1;\\
&\text{赝标量,} && \bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2\to\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_1;\\
&\text{矢量,} && \bar{\psi}_1\gamma_{\mu}\psi_2\to-\bar{\psi}_2\gamma_{\mu}\psi_1;\\
&\text{轴矢量,} && \bar{\psi}_1\gamma_{\mu}\gamma_5\psi_2\to\bar{\psi}_2\gamma_{\mu}\gamma_5\psi_1;\\
&\text{张量,} && \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\to-\bar{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

利用(2.10),(2.11),(2.12)式,可以证明 QED 和 QCD 拉氏量及作用量都是 C 不变的．现给出两个应用例子．

第一个例子是弗里(Furry)定理:偶数光子态和奇数光子态不能互变．

其证明如下:

光子场的矢量势 $A_{\mu}(x)$ 在库仑规律下满足

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)=0,
$$

所以只有横光子,

$$
\boldsymbol{A}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^{3}k}{\sqrt{2w(2\pi)^{3}}}\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\left[\alpha(\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{-ikx}+\alpha^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{ikx}\right]. \tag{2.13}
$$

由(2.10)式,对矢量势 $\boldsymbol{A}(x)$,有

$$
C\boldsymbol{A}(x)C^{-1}=-\boldsymbol{A}(x), \tag{2.14}
$$

由此把(2.13)式代入(2.14)式,给出

$$
C\alpha^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)C^{-1}=-\alpha^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda), \tag{2.15}
$$

所以光子有确定的 C 宇称 -1. 因选定真空态 $|0\rangle$ 的 C 宇称为 $+1$,即 $C|0\rangle=|0\rangle$,所以有

$$
C|n\gamma\rangle=(-1)^{n}|n\gamma\rangle. \tag{2.16}
$$

其中 n 光子态为

$$|n\gamma\rangle = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^\dagger(\boldsymbol{k}_i,\lambda_i)\,|0\rangle. \tag{2.17}$$

QED 的拉氏量及哈密顿量都是 C 不变的，因而 S 矩阵也是 C 不变的，即

$$CSC^\dagger = S,\quad C^\dagger SC = S. \tag{2.18}$$

对任何 $|n\gamma\rangle \to |n'\gamma\rangle$ 过程，有

$$\langle n'\gamma|S|n\gamma\rangle = \langle n'\gamma|CSC^\dagger|n\gamma\rangle = \langle n'\gamma|C^\dagger SC|n\gamma\rangle = (-1)^{n+n'}\langle n'\gamma|S|n\gamma\rangle. \tag{2.19}$$

由(2.19)式，显然，$n+n'$ 不可能为奇数．这样，我们就证明了这一定理．

第二个例子是：自旋为 1 的粒子不能衰变为两个光子[1]．

其证明如下：

在衰变粒子的质心系，末态两光子的动量大小相等方向相反．因初态总角动量 $J=1$，所以末态也是 $J=1$，因而按矢量变换．但由两光子的极化矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}_j(\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{\varepsilon}_k(\boldsymbol{p})$ 和动量 $\boldsymbol{p}$ 可以构造的矢量为

$$|2\gamma\rangle_i = \int \mathrm{d}^3 p X_{ijk}(\boldsymbol{p})\alpha_j^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha_k^\dagger(-\boldsymbol{p})\,|0\rangle, \tag{2.20}$$

其中 $\alpha_j^\dagger(\boldsymbol{p}) = \alpha^\dagger(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\varepsilon}_j(\boldsymbol{p})$，$\alpha_k^\dagger(-\boldsymbol{p}) = \alpha^\dagger(-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\varepsilon}_k(-\boldsymbol{p})$．$X_{ijk}(\boldsymbol{p})$ 只依赖于 $\boldsymbol{p}$，其一般形式为

$$\begin{aligned} X_{ijk}(\boldsymbol{p}) = {} & A\varepsilon_{ijk} + Bp_i\delta_{jk} + Cp_j\delta_{ik} + Dp_k\delta_{ij} + B'p_i\varepsilon_{jkl}p_l \\ & + C'p_j\varepsilon_{kil}p_l + D'p_k\varepsilon_{ijl}p_l + Ep_ip_jp_k. \end{aligned} \tag{2.21}$$

横光子条件给出

$$p_i\alpha_i^\dagger(\boldsymbol{p}) = 0, \tag{2.22}$$

因此(2.21)式中 C,D,C',D',E 项不做贡献．这样，

$$X_{ijk}(\boldsymbol{p}) = A\varepsilon_{ijk} + Bp_i\delta_{jk} + B'p_i\varepsilon_{jkl}p_l. \tag{2.23}$$

显然(2.23)式意味着

$$X_{ijk}(\boldsymbol{p}) = -X_{ikj}(-\boldsymbol{p}). \tag{2.24}$$

因光子服从玻色统计，(2.20)式中 $\alpha_j^\dagger(\boldsymbol{p})$ 和 $\alpha_k^\dagger(-\boldsymbol{p})$ 交换结果应不变．所以

$$|2\gamma\rangle_i = \int \mathrm{d}^3 p X_{ijk}(\boldsymbol{p})\alpha_k^\dagger(-\boldsymbol{p})\alpha_j^\dagger(\boldsymbol{p})\,|0\rangle. \tag{2.25}$$

将上式 $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}, j\to k, k\to j$，有

$$|2\gamma\rangle_i = \int \mathrm{d}^3 p X_{ikj}(-\boldsymbol{p})\alpha_j^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha_k^\dagger(-\boldsymbol{p})\,|0\rangle. \tag{2.26}$$

(2.20) 式加(2.26) 式再除以 2,有

$$|2\gamma\rangle_i=\frac{1}{2}\int d^3p[X_{ijk}(\boldsymbol{p})+X_{ikj}(-\boldsymbol{p})]\alpha_j^{\dagger}(\boldsymbol{p})\alpha_k^{\dagger}(-\boldsymbol{p})|0\rangle=0. \quad (2.27)$$

最后一步利用了(2.24) 式. 这一命题证毕.

§2.3　时间反演变换 T

时间反演变换将时间 t 变为 $-t$,粒子的动量、自旋、角动量都要改变方向. 经典力学系统,如 N 个粒子系统,可由广义坐标和广义动量描写:

$$\begin{cases} q_i(t), \\ p_i(t), \end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,N.$$

时间反演不变意味着如果 $q_i(t)$,$p_i(t)$是运动方程的解,则 $q_i(-t)$,$p_i(-t)$也是运动方程的解,即有限个粒子的力学系统在时间反演下是可逆的. 但是,对大量粒子或无限多的粒子的力学系统来说,要想把每个粒子的运动都逆转,其几率就非常小了. 例如,水滴从水龙头滴到池中而溅散的过程,要把时间反演 $t\rightarrow -t$,使溅散的水珠回到一起再聚回水龙头是不可能的(几率接近于 0). 正如同热力学熵增加的过程不可逆一样,时间可逆的运动方程产生了时间不可逆的热力学. 也就是说,逆转单个粒子的运动(微观)可能,逆转大量粒子(宏观)的几率就太小了(不可能了).

对微观量子系统,粒子的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle=H|t\rangle, \qquad (2.28)$$

其中$|t\rangle$是任意时刻 t 的态矢量. 定义时间反演算子

$$T=KU_T, \qquad (2.29)$$

其中 K 是取复数共轭的运算,U_T 是幺正算符. H 称作是 T 不变的,只要 H 满足

$$THT^{-1}=U_TH^*U_T^{\dagger}=H. \qquad (2.30)$$

由(2.29),(2.30)式,对(2.28)式实行 T 变换,有

$$T\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle\right)=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U_T|t\rangle^*=TH|t\rangle=THT^{-1}T|t\rangle=HU_T|t\rangle^*,$$

即

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U_T|t\rangle^*=HU_T|t\rangle^*. \qquad (2.31)$$

令 $t'=-t$,$|t'\rangle=U_T|t\rangle^*$,则时间反演后的薛定谔方程(2.31)可改写为

$$i\frac{\partial}{\partial t'}|t'\rangle=H|t'\rangle. \tag{2.32}$$

比较(2.28)和(2.32)式可见，在时间反演的定义(2.29)式之下，薛定谔方程是不变的．

从(2.30)式可得出，对任何一个算符 O，T 变换为

$$TOT^{-1}=U_T O^* U_T^{\dagger}. \tag{2.33}$$

当 O 为单位算子时，由(2.23)式有 $TT^{-1}=1$.

对任一态矢组合

$$|\rangle=c_1|1\rangle+c_2|2\rangle, \tag{2.34}$$

则有

$$T|\rangle=c_1^* T|1\rangle+c_2^* T|2\rangle. \tag{2.35}$$

显然 T 运算不是线性运算，也不是幺正变换，我们称之为反幺正算符．

应当指出，对某个微观过程，即使薛定谔方程是时间反演不变的，要想构造一个时间反演的量子解也是很困难的，实际上不可能的．这方面李政道的书[1]中有精彩的论述，这里不再展开讨论．所以，实验上检验 T 不变性不是构造某个过程的时间反演的量子解，而是测量某个物理观测量在时间反演下的改变．文献[1]中给出了利用"倒易关系"和 β 衰变中 G_V/G_A 为实数证明 T 不变的两个例子．在第五章中我们还将给出，CPLEAR 测量不对称性

$$\mathscr{A}_{\mathrm{T}}=\frac{\Gamma(\overline{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0,t)-\Gamma(\mathrm{K}^0\to\overline{\mathrm{K}}^0,t)}{\Gamma(\overline{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0,t)+\Gamma(\mathrm{K}^0\to\overline{\mathrm{K}}^0,t)}$$

及测量 $\mathrm{K_L}\to\pi^+\pi^-e^+e^-$ 角关联，证实 T 不变性直接破坏的例子．

为了在场论中讨论 T 变换，我们要定义场算符在 T 变换下的性质．我们把结果列出，详细的讨论可参阅李政道和 Bjorken，Drell 的书，即文献[1]和[3].

$$\begin{array}{ll}
\text{标量场,} & \phi(\boldsymbol{x},t)\to T\phi(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=\phi(\boldsymbol{x},-t);\\
\text{赝标量场,} & \varphi(\boldsymbol{x},t)\to T\varphi(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=\varphi(\boldsymbol{x},-t);\\
\text{旋量场,} & \begin{array}{l}\psi(\boldsymbol{x},t)\to T\psi(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},-t),\\ \bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\to T\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=\bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)\mathscr{T}^{\dagger};\end{array}\\
\text{矢量场,} & V_\mu(\boldsymbol{x},T)\to TV_\mu(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=V^\mu(\boldsymbol{x},-t);\\
\text{轴矢量场,} & A_\mu(\boldsymbol{x},T)\to TA_\mu(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=A^\mu(\boldsymbol{x},-t).
\end{array} \tag{2.36}$$

其中 T 为希尔伯特空间的算子，而右面的 $\mathscr{T}$ 为狄拉克矩阵，

$$\begin{gathered}\mathscr{T}=i\gamma^1\gamma^3,\ \mathscr{T}\gamma_\mu\mathscr{T}^{-1}=\gamma_\mu^{\mathrm{T}}=\gamma^{\mu *},\\ \mathscr{T}=\mathscr{T}^{\dagger}=\mathscr{T}^{-1}=-\mathscr{T}^*.\end{gathered} \tag{2.37}$$

双线型在 T 变换下的性质如下：

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x},-t);\\
&c\text{-数}\to(c\text{-数})^*;\\
&\bar{\psi}_1\psi_2\to\bar{\psi}_1\psi_2;\\
&\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2\to-\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2;\\
&\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2\to\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2;\\
&\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2\to\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2;\\
&\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\to\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

下面讨论 S 矩阵在时间反演变换下的性质．为此，我们先列出态矢量和场算符在各种表象下的运动方程及相互关系，我们用上下标 S 表薛定谔表象，H 表海森伯表象，I 表示相互作用表象．

海森伯表象的态矢量 $|t\rangle_{\rm H}$ 与时间无关，算符 $O_{\rm H}(t)$ 与时间有关，其运动方程为：

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O_{\rm H}(t)&=[H_{\rm H},O_{\rm H}(\mathrm{t})],\\
\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_{\rm H}&=0.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

薛定谔表象的态矢量 $|t\rangle_{\rm S}$ 与时间相关，而算符 $O_{\rm S}(t)$ 与时间无关，其运动方程为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}O_{\rm S}(t)&=0,\\
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_{\rm S}&=H_{\rm S}|t\rangle_{\rm S}.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

相互作用表象的态矢量 $|t\rangle_{\rm I}$ 和算符 $O_{\rm I}(t)$ 都与时间有关．定义总哈密顿量 $H_{\rm I}$ 可分解为两部分：

$$
H_{\rm I}=H_0^{\rm I}+H_{\rm int}^{\rm I}.\tag{2.41}
$$

则运动方程为：

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O_{\rm I}(t)&=[H_0^{\rm I},O_{\rm I}(t)],\\
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_{\rm I}&=H_{\rm int}^{\rm I}|t\rangle_{\rm I}.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

(2.40)式的 $|t\rangle_{\rm S}$ 可用 $t=0$ 时的态矢量 $|0\rangle_{\rm S}$ 表示出来，即

$$|t\rangle_S = e^{-iH_S t}|0\rangle_S. \tag{2.43}$$

因$|t\rangle_H$与t无关，可选

$$|t\rangle_H = |0\rangle_H = |0\rangle_S = e^{iH_S t}|t\rangle_S, \tag{2.44}$$

最后一步用了(2.43)式．这样

$$|t\rangle_H = e^{iH_S t}|t\rangle_S. \tag{2.45}$$

(2.45)式相当于对$|t\rangle_S$做了幺正变换$e^{iH_S t}$．相应的算符也应做相应的幺正变换$e^{iH_S t}$，

$$O_H(t) = e^{iH_S t}O_S(t)e^{-iH_S t}. \tag{2.46}$$

当取O算符为哈密顿量时，(2.46)式给出

$$H_H = H_S \equiv \mathrm{H}. \tag{2.47}$$

(2.45)，(2.46)式恰好满足(2.39)式．

令

$$|t\rangle_I = e^{iH_0^S t}|t\rangle_S, \tag{2.48}$$

则

$$O_I(t) = e^{iH_0^S t}O_S(t)e^{-iH_0^S t}. \tag{2.49}$$

由(2.49)式可见，

$$H_0^S = H_0^I \equiv H_0. \tag{2.50}$$

H_S同样可分解为

$$H_S = H_0^S + H_{int}^S. \tag{2.51}$$

容易证明(2.48)，(2.49)与(2.42)式等价．对(2.49)式取$\frac{\partial}{\partial t}$直接得(2.42)第一式[注意$O_S(t)=O_S(0)$与时间无关]．由(2.48)式得

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I &= e^{iH_0^S t}(-H_0^S + H_S)|t\rangle_S = e^{iH_0 t}H_{int}^S|t\rangle_S \\ &= e^{iH_0 t}H_{int}^S e^{-iH_0 t}e^{iH_0 t}|t\rangle_S \\ &= H_{int}^I|t\rangle_I, \end{aligned}$$

这正是(2.42)中的第二式．

由(2.39)～(2.51)各方程容易看出，这三种表象在物理上是完全等价的，即对任意两态矢量$|a\rangle$，$|b\rangle$，这三种表象的矩阵元相等：

$$(\langle a|O|b\rangle)_H = (\langle a|O|b\rangle)_S = (\langle a|O|b\rangle)_I.$$

有了以上的基础，我们下面证明：如果物理系统在时间反演变换下不变，则 S 矩阵满足

$$TST^{-1}=S^{\dagger}. \tag{2.52}$$

在相互作用表象下，U 矩阵满足

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t)U(t,t_0),\\ &U(t_0,t_0)=1. \end{aligned} \tag{2.53}$$

系统 T 不变指 $H_{\mathrm{S}}=H^{\mathrm{S}}_0+H^{\mathrm{S}}_{\mathrm{int}}$ 在 T 变换下满足

$$\begin{aligned} &TH_{\mathrm{S}}T^{-1}=H_{\mathrm{S}},\\ &TH^{\mathrm{S}}_0T^{-1}=H^{\mathrm{S}}_0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

由(2.54)式可推出

$$TH^{\mathrm{S}}_{\mathrm{int}}T^{-1}=H^{\mathrm{S}}_{\mathrm{int}}. \tag{2.55}$$

对(2.53)式两边实行 T 变换，得

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial(-t)}TU(t,t_0)T^{-1}=TH^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t)U(t,t_0)T^{-1}=TH^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t)T^{-1}TU(t,t_0)T^{-1},\\ &TU(t_0,t_0)T^{-1}=1. \end{aligned} \tag{2.56}$$

其中，

$$\begin{aligned} TH^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t)T^{-1}&=T\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0t}H^{\mathrm{S}}_{\mathrm{int}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0t}T^{-1}\\ &=T\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0t}T^{-1}TH^{\mathrm{S}}_{\mathrm{int}}(t)T^{-1}T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0t}T^{-1}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

利用 $T=KU_T$ 和(2.30)，(2.54)式，有

$$\begin{aligned} TH^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t)T^{-1}&=U_T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}*}_0t}U^{\dagger}_TH^{\mathrm{S}}_{\mathrm{int}}U^T\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}*}_0t}U^{\dagger}_T\\ &=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0t}H^{\mathrm{S}}_{\mathrm{int}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}_0t}\\ &=H^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(-t), \end{aligned} \tag{2.58}$$

最后一步用了(2.49)式．将(2.58)代入(2.56)式，(2.56)式变为

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dfrac{\partial}{\partial(-t)}TU(t,t_0)T^{-1}=H^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(-t)TU(t,t_0)T^{-1},\\ TU(t_0,t_0)T^{-1}=1. \end{cases} \tag{2.59}$$

(2.59)式的解容易看出为 $U(-t,-t_0)$，即

$$TU(t,t_0)T^{-1}=U(-t,-t_0). \tag{2.60}$$

因 S 矩阵的定义为

$$S=U(\infty,-\infty), \tag{2.61}$$

由(2.60)式得

$$TST^{-1}=U(-\infty,\infty). \tag{2.62}$$

利用 U 矩阵的幺正性,显然有

$$U(t,t')U(t',t_0)=U(t,t_0), \tag{2.63}$$

可得

$$U(-\infty,\infty)=U(\infty,-\infty)^{-1}=U(\infty,-\infty)^{\dagger},$$

(2.62)式变为

$$TST^{-1}=S^{-1}=S^{\dagger}. \tag{2.64}$$

至此该命题证毕.

作为检验时间反演不变性的例子,我们先来证明"倒易关系".

考虑粒子的反应过程

$$a+b+\cdots\rightleftarrows a'+b'+\cdots, \tag{2.65}$$

如果用每个粒子的动量 $\boldsymbol{p}_i$ 和螺旋度(helicity)s_i($i=a,b,\cdots$)来标记(2.65)式左边的粒子,用 $\boldsymbol{p}_j',s_j'$($j=a',b',\cdots$)标记右边的粒子,则利用(2.64)式可以证明如下的"倒易关系":

$$|\langle \boldsymbol{p}_j',s_j'|S|\boldsymbol{p}_i,s_i\rangle|=|\langle -\boldsymbol{p}_i,s_i|S|-\boldsymbol{p}_j',s_j'\rangle|. \tag{2.66}$$

以下是其证明:

在时间反演变换下粒子的动量和自旋都要反向,但螺旋度不变,所以

$$\begin{aligned} T|\boldsymbol{p}_i',s_i'\rangle&=e^{i\theta}|-\boldsymbol{p}_i',s_i'\rangle,\\ T|\boldsymbol{p}_j',s_j'|\rangle&=e^{i\theta'}|-\boldsymbol{p}_j',s_j'\rangle, \end{aligned} \tag{2.67}$$

这里 θ,θ' 为任意位相.利用(2.67)式我们有,

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}_j',s_j'|S|\boldsymbol{p}_i,s_i\rangle&=\langle \boldsymbol{p}_j',s_j'|T^{-1}TST^{-1}T|\boldsymbol{p}_i,s_i\rangle\\ &=\langle -\boldsymbol{p}_j',s_j'|TST^{-1}|-\boldsymbol{p}_i,s_i\rangle e^{i(\theta-\theta')}\\ &=\langle -\boldsymbol{p}_j',s_j'|S^{\dagger}|-\boldsymbol{p}_i,s_i\rangle e^{i(\theta-\theta')}.\end{aligned} \tag{2.68}$$

将(2.68)式两端取复共轭,得

$$\langle \boldsymbol{p}_j',s_j'|S|\boldsymbol{p}_i,s_i\rangle^{*}=e^{i(\theta'-\theta)}\langle -\boldsymbol{p}_i',s_i'|S|-\boldsymbol{p}_j',s_j'\rangle. \tag{2.69}$$

这使得(2.66)式成立.

利用倒易关系(2.66)式可以导出两体核反应中正反过程的截面关系.例如,对

$$a+b \rightleftarrows a'+b', \tag{2.70}$$

可以推出[1]

$$\frac{\sigma(a+b\to a'+b')}{\sigma(a'+b'\to a+b)}=\frac{(2j_{a'}+1)(2j_{b'}+1)\boldsymbol{k}'^2}{(2j_a+1)(2j_b+1)\boldsymbol{k}^2}\times\begin{cases}\frac{1}{2}, & 若\ a\neq b\ 且\ a'=b',\\ 2, & 若\ a=b\ 且\ a'\neq b',\\ 1, & 其他情况.\end{cases} \tag{2.71}$$

其中 j 为粒子自旋，$\boldsymbol{k}'$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别为 $a'+b'$ 和 $a+b$ 质心系中的 a'(或 b')及 a(或 b)的动量.(2.71)式的结果已被两个核反应实验所证实[8]，这两个实验是：

$$^{24}\mathrm{Mg}+\mathrm{d} \rightleftarrows {}^{25}\mathrm{Mg}+\mathrm{p},\quad {}^{24}\mathrm{Mg}+\alpha \rightleftarrows {}^{27}\mathrm{Al}+\mathrm{p}. \tag{2.72}$$

对 G_V/G_A 为实数的讨论，请参阅李政道的书[1]，我们不再讨论.

§2.4 乘积变换 CP,CPT 和 CPT 定理

前面已讨论了单个分立变换 P,C,T. 乘积变换是指连续实行每个因子的变换，如 CP 指连续实行 P 和 C 变换. 根据§2.1—§2.3 的讨论，我们本节只给出场算符和双线型在 CP,CPT 变换下的性质，最后给出 CPT 定理.

在 CP 变换下：

$$\begin{aligned}&标量场, && \phi(\boldsymbol{x},t)\to\phi^\dagger(-\boldsymbol{x},t),\\ &赝标量场, && \varphi(\boldsymbol{x},t)\to-\varphi^\dagger(-\boldsymbol{x},t),\\ &矢量场, && V_\mu(\boldsymbol{x},t)\to-V^{\mu\dagger}(-\boldsymbol{x},t),\\ &轴矢量场, && A_\mu(\boldsymbol{x},t)\to-A^{\mu\dagger}(-\boldsymbol{x},t);\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},t)&\to(-\boldsymbol{x},t),\\ \bar\psi_1\psi_2&\to\bar\psi_2\psi_1,\\ \bar\psi_1\gamma_5\psi_2&\to-\bar\psi_2\gamma_5\psi_1,\\ \bar\psi_1\gamma_\mu\psi_2&\to-\bar\psi_2\gamma^\mu\psi_1,\\ \bar\psi_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2&\to-\bar\psi_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1,\\ \bar\psi_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2&\to-\bar\psi_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1.\end{aligned} \tag{2.74}$$

在 CPT 变换下：

$$\begin{aligned}&标量场, && \phi(\boldsymbol{x},t)\to\phi^\dagger(-\boldsymbol{x},-t),\\ &赝标量场, && \varphi(\boldsymbol{x},t)\to-\varphi^\dagger(-\boldsymbol{x},-t),\\ &矢量场, && V_\mu(\boldsymbol{x},t)\to-V_\mu^\dagger(-\boldsymbol{x},-t),\\ &轴矢量场, && A_\mu(\boldsymbol{x},t)\to-A_\mu^\dagger(-\boldsymbol{x},-t);\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x},t) &\to (-\boldsymbol{x},-t),\\
(c\text{-数}) &\to (c\text{-数})^*,\\
\bar{\psi}_1\psi_2 &\to \bar{\psi}_2\psi_1\\
\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2 &\to \bar{\psi}_2\gamma_5\psi_1\\
\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 &\to -\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_1\\
\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 &\to -\bar{\psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\psi_1\\
\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 &\to \bar{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1.
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

下面我们给出 CPT 定理，但不做证明．证明可参阅教科书[1]和[3].

CPT 定理：如果一个场理论是定域的，满足洛伦兹变换的不变性，量子化条件满足通常的自旋-统计关系，则该理论是 CPT 变换下不变的．

CPT 定理的重要推论为：

(1) 粒子和反粒子质量相等；

(2) 粒子和反粒子寿命相同；

(3) 粒子和反粒子电磁性质相反，如电荷、磁矩都是大小相等符号相反．

如果一个理论是 CPT 不变的，则 CP 破坏意味着 T 破坏，反之亦然．但实验上仍须直接测量 CP 破坏和 T 破坏，而不是借助于 CPT 定理．在以后的章节中我们将讨论这些问题．

参 考 文 献

[1] 李政道．场论与粒子物理学．北京：科学出版社，1980.

[2] Bigi I I, Sanda A I. CP Violation. Cambridge University Press, 2000.

[3] Bjorken J D, Drell S. Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill Book Company, 1965.

[4] Lee T D, Yang C N. Phys. Rev., 1956, 104: 254.

[5] Rochester G D, Butler C C. Nature, 1947, 160: 855.

[6] Wu C S, Ambler E, Hayward R W, et al. Phys. Rev., 1957, 105: 1413. Garwin R L, Lederman L M, Weinrich M. Phys. Rev., 1957, 105: 1415. Telegdi V L, Friedman A M. Phys. Rev., 1957, 105: 1618.

[7] Christenson J H, Cronin J W, Fitch V L, et al. Phys. Rev. Lett., 1964, 13: 138.

[8] Weitkamp W G, et al. Phys. Rev., 1968, 165: 1233. von Witsch W, et al. Phys. Rev. Lett., 1967, 19: 524.

第三章 标准模型及其 CP 破坏机制

大量实验证明，描写强相互作用的最好理论是量子色动力学（QCD），而描写弱相互作用和电磁相互作用的正确理论是具有三代夸克、轻子的规范理论——SU(2)×U(1)的弱电统一理论，即 Glashow-Weinberg-Salam 模型．今天说的标准模型就是指$SU(3)_c \times SU(2) \times SU(1)$的规范理论．具有三代夸克和轻子并且夸克之间有混合是理论容纳 CP 破坏的关键．

§3.1 Cabibbo 理论和 GIM 机制

1963 年，Cabibbo 首先在强子流中引入了 SU(3)对称[1]．对半轻子衰变，弱相互作用哈密顿量为

$$H_{SL}=\frac{G_F}{\sqrt{2}}J_\mu^+ j^\mu +h.c.,\tag{3.1}$$

其中，J_μ为强子流，j_μ为轻子流．对 β 衰变，

$$J_\mu^+=\bar{p}\gamma_\mu(1-\gamma_5)n, j_\mu^-=\bar{l}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu.\tag{3.2}$$

在强子的 SU(3)对称变换下，强子可在同一个八重态或十重态内互相变换，J_μ^+ 也可变成奇异数改变的强子流，所以一般而言，J_μ^+ 应包含 $\Delta S=0$ 和 $\Delta S=1$ 的流．这样一来，

$$J_\mu^+=aJ_\mu^{+,\Delta S=0}+bJ_\mu^{+,\Delta S=1}.\tag{3.3}$$

归一化有$|a|^2+|b|^2=1$，故可取

$$\begin{gathered}a=\cos\theta_C, b=\sin\theta_C,\\ J_\mu^+=J_\mu^{+,\Delta S=0}\cos\theta_C+J_\mu^{+,\Delta S=1}\sin\theta_C.\end{gathered}\tag{3.4}$$

推广至夸克层次，(3.4)式改写为

$$J_\mu^+=\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)(d\cos\theta_C+s\sin\theta_C),\tag{3.5}$$

半轻子衰变的哈密顿量可写为

$$H_{SL}=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)(d\cos\theta_C+s\sin\theta_C)\bar{l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_l+h.c..\tag{3.6}$$

从(3.6)式可看出，弱相互作用本征态不是 d 或 s 而是它们的混合态

$$d'=d\cos\theta_C+s\sin\theta_C. \tag{3.7}$$

如果将与 d' 正交的另一个弱作用本征态记做 s'，则

$$s'=-d\sin\theta_C+s\cos\theta_C. \tag{3.8}$$

$(d,s)\rightarrow(d',s')$ 的混合可记为

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

注意到这里 u,d,s 是夸克质量本征态，d',s' 为弱作用本征态．

在只有三个夸克的 Cabibbo 理论中，(3.8)式中的 s' 并没有参与弱相互作用，这会带来严重的后果．实际上，除了(3.5)式的带电流外，必然还存在着中性流 $\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u$，$\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d$ 等．为方便我们略去 γ 矩阵不写，则

$$J_\mu^0=\bar{u}u+\bar{d}'d'=\bar{u}u+\cos^2\theta_C\bar{d}d+\sin^2\theta_C\bar{s}s+\sin\theta_C\cos\theta_C(\bar{d}s+\bar{s}d). \tag{3.10}$$

(3.10)式最后两项是味改变的中性流，它将导致味改变的中性流衰变与带电流衰变同量级．如将导致

$$\mathrm{K}^+\rightarrow\pi^++\bar{\mathrm{l}}+\mathrm{l}\quad(\mathrm{l}=\mathrm{e},\mu) \tag{3.11}$$

有大的分支比．但实际上(3.11)过程的分支比都在 10^{-7} 量级．为了克服这一困难，1970 年 Glashow，Iliopoulos 和 Maiani 提出了包含第四个夸克的理论[2]，从而解决了这一问题．

当时(1970 年)实验上已发现四种轻子，$\mathrm{e},\nu_e,\mu,\nu_\mu$，它们可以组成两个二重态

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

而夸克当时只有 u，d，s 三种．(u,d') 构成带电流 $J_\mu^{+,ud'}=\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d'$，但 s′不参与弱作用，这样轻子和夸克很不对称．于是，GIM 三人从对称性角度考虑，提出存在第四种味道的夸克 c，其电荷 $Q_c=\frac{2}{3}$，与 u 夸克一样，而夸克参与弱相互作用的二重态应为

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

这样一来，(3.10)式的中性流应为

$$J_\mu^0=\bar{u}u+\bar{c}c+\bar{d}'d'+\bar{s}'s'$$

$$=\bar{u}u+\bar{c}c+\bar{d}d+\bar{s}s, \tag{3.14}$$

不再出现味改变的中性流.这种消除味改变中性流的机制被称作 GIM 机制.注意，这种消除只是在弱相互作用的最低阶(G_F 一次方)下实现的，在弱作用的高阶修正仍可能出现味改变的中性流，所以 GIM 机制又称 GIM 压低.

引进粲夸克(c)后，夸克带电流可写成

$$J_\mu^- = (\bar{u},\bar{c})\gamma_\mu(1-\gamma_5)V_C\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

其中

$$V_C=\begin{bmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

为 Cabibbo 的夸克混合矩阵.

GIM 引进的 c 夸克 1974 年被丁肇中和Richter分别领导的实验组在 BNL(布鲁克海文实验室)和 SLAC(斯坦福直线加速器中心)发现.此后又发现了一系列的($\bar{c}$c)束缚态.有兴趣的读者可参阅有关的文献.

§ 3.2　Kobayashi-Maskawa 模型

1973 年 Kobayashi 和 Maskawa 把 Cabibbo 的夸克混合思想和 GIM 引入 c 夸克的思想推广到三代夸克的情形[3]，引入另一对夸克(t，b)，t 夸克电荷为$\frac{2}{3}$，b 夸克电荷为$-\frac{1}{3}$.这样，三代夸克为

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix},\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

其中

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

(3.18)中(d,s,b)为夸克的质量本征态，d',s',b'为弱相互作用本征态，它们是 d,s,b 的混合，混合矩阵

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

称为 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵，简称 CKM 矩阵．带电夸克流可写为

$$J_\mu^+ = (\bar{u},\bar{c},\bar{t})\gamma_\mu(1-\gamma_5)V_{\mathrm{CKM}}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

V_{CKM}是 3×3 的复幺正矩阵，共有 9 个独立实参数．(3.20)式中 6 个夸克场$(\bar{u},\bar{c},\bar{t})$，$(d,s,b)$的位相有 5 个是独立相对位相，可以任意调整，因而可消去 V_{CKM} 中的 5 个独立实参数．这样只剩下 $9-5=4$ 个独立实参数，其中 3 个可选为三维空间的转动角，另一个是复位相，记为 $\theta_{12},\theta_{23},\theta_{13},\delta_{13}$．复位相的存在使

$$V_{\mathrm{CKM}}^* \neq V_{\mathrm{CKM}}. \tag{2.21}$$

下面会证明，这将导致 CP 破坏．V_{CKM}参数化形式将在后面详细讨论．

§ 3.3　弱电统一理论的标准模型

四费米子流-流耦合的弱相互作用理论虽然取得了巨大成功，但也有其局限性．如对非弹散射过程

$$\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e, \tag{3.22}$$

只考虑 s 波散射，用流-流耦合哈密顿量

$$H = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)e\bar{\mu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu + h.c. \tag{3.23}$$

来计算上述过程截面时给出

$$\sigma(\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e) = \frac{8}{\pi}(G_F k)^2, \tag{3.24}$$

其中 $k=|\boldsymbol{k}|$是质心系中 ν_μ 的动量．显然，$k\to\infty$时(3.24)式中的 σ 会发散．根据 s 波散射的幺正极限，有

$$\sigma \leqslant \frac{\pi}{k^2}, \tag{3.25}$$

所以，要保持几率守恒，即保持幺正性，必须有

$$\frac{8}{\pi}(G_F k)^2 \leqslant \frac{\pi}{k^2}, \tag{3.26}$$

即

$$k\leqslant\left(\frac{\pi}{G_F 2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 300\ \text{GeV}. \tag{3.27}$$

也就是说，弱相互作用低能有效理论——四费米子流-流耦合在动量大于300 GeV时会破坏几率守恒，因而是不适用的．

修改四费米子理论最成功的出路是弱电统一标准模型，即 SU(2)×U(1)规范场理论，其拉氏量可写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\mathscr{L}(f,G)+\mathscr{L}(f,H)+\mathscr{L}(G,H)+\mathscr{L}(G)-V(H)\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu})-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}+(\mathrm{D}_\mu H)^\dagger(\mathrm{D}^\mu H)-V(H)\\&\quad-\mathrm{i}L_{jL}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu L_{jL}-\mathrm{i}E_{jR}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu E_{jR}\\&\quad-\mathrm{i}\bar{Q}_{jL}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu Q_{jL}-\mathrm{i}U_{jR}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu U_{jR}-\mathrm{i}\bar{D}_{jR}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu D_{jR}\\&\quad-\{\lambda_{ij}^{u}\bar{Q}_{iL}\widetilde{H}U_{jR}+\lambda_{ij}^{d}\bar{Q}_{iL}HD_{iR}+h.c.\}\\&\quad-\{\lambda_{ij}L_{iL}HE_{jR}+h.c.\},\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中 f 代表费米子场——夸克和轻子，G 代表规范介子场 $\vec{W}$ 和 B，H 代表 Higgs 粒子场．

$$\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}g_2W_\mu-\mathrm{i}g_1\frac{Y_w}{2}B_\mu, \tag{3.29}$$

其中 g_2 和 g_1 分别为 SU(2)和 U(1)耦合常数，Y_w 作用于不同的场有不同的值，

$$\begin{aligned}&Y_w(H)=1,\quad Y_w(L_{jL})=-1,\quad Y_w(E_{jR})=-2,\\&Y_w(Q_{jL})=\frac{1}{3},\quad Y_w(U_{jR})=\frac{4}{3},\quad Y_w(D_{jR})=-\frac{2}{3}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

而

$$V(H)=-\mu^2H^\dagger H+\lambda(H^\dagger H)^2,$$

其中

$$H=\begin{pmatrix}\varphi^+\\\varphi^0\end{pmatrix}.$$

(3.28)式中其他符号的意义分别为：

$$\begin{cases}W_\mu=W_\mu^i\dfrac{\sigma^i}{2},\ \sigma^i\ \text{为 Pauli 矩阵；}\\W_{\mu\nu}=\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu+\mathrm{i}g_2[W_\mu,W_\nu].\end{cases} \tag{3.31}$$

$$B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu. \tag{3.32}$$

$$\begin{cases} L_{jL}=\begin{pmatrix}\nu_j\\ E_j\end{pmatrix}_L, j=1,2,3\ \text{为代指标}, \\ L_{1L}=\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L, L_{2L}=\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L, L_{3L}=\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L, \\ E_{jR}=e_R, \mu_R, \tau_R. \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} Q_{jL}=\begin{pmatrix}U_j\\ D_j\end{pmatrix}_L, j=1,2,3, \\ Q_{1L}=\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L, Q_{2L}=\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}_L, Q_{3L}=\begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}_L. \end{cases} \tag{3.34}$$

$$U_{jR}=u_R, c_R, t_R,\ D_{jR}=d_R, s_R, b_R. \tag{3.35}$$

$$\mathscr{L}(G)=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu})-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{3.36}$$

$$\mathscr{L}(G,H)=(\mathrm{D}_\mu H)^+(\mathrm{D}^\mu H). \tag{3.37}$$

$$-\mathscr{L}(f,G)=\mathrm{i}\overline{L}_{jL}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu L_{jL}+\mathrm{i}\overline{E}_{jR}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu E_{jR}+\mathrm{i}\overline{Q}_{jL}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu Q_{jL}+\mathrm{i}\overline{U}_{jR}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu U_{jR} +\mathrm{i}\overline{D}_{jR}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu D_{jR}. \tag{3.38}$$

$$-\mathscr{L}(f,H)=\{\lambda^u_{ij}\overline{Q}_{iL}\widetilde{H}U_{iR}+\lambda^d_{ij}\overline{Q}_{iL}HD_{jR}+h.c.\}+\{\lambda_{ij}\overline{L}_{iL}HE_{jR}+h.c.\}, \tag{3.39}$$

其中 $\lambda^u_{ij},\lambda^d_{ij},\lambda_{ij}$ 为 Yukawa 耦合常数，

$$\widetilde{H}=\mathrm{i}\sigma_2 H^*=\begin{pmatrix}\varphi^{0*}\\ -\varphi^-\end{pmatrix} \tag{3.40}$$

为 $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重态．

应当指出，(3.28)式中夸克和规范场 W 的相互作用项

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}}=-\frac{g_2}{\sqrt{2}}\overline{U}_L\gamma^\mu D_L W^+_\mu+h.c. \tag{3.41}$$

是在弱作用本征态的夸克场基上写出的．在这个基上，夸克场和 W 场的相互作用项是对角的，但夸克的质量项不对角．实际上

$$-\lambda^u_{ij}\overline{Q}_{iL}\widetilde{H}U_{jR}-\lambda^d_{ij}\overline{Q}_{iL}HD_{jR}+h.c. \tag{3.42}$$

当 H 取真空期望值时可化为

$$-m^u_{ij}\overline{U}_{iL}U_{jR}-m^d_{ij}\overline{D}_{iL}D_{jR}+h.c., \tag{3.43}$$

其中

$$m_{ij}^{\mathrm{u}}=\frac{v}{\sqrt{2}}\lambda_{ij}^{\mathrm{u}},\quad m_{ij}^{\mathrm{d}}=\frac{v}{\sqrt{2}}\lambda_{ij}^{\mathrm{d}}.$$

如果想把(3.41),(3.42),(3.43)式化到夸克质量本征态基底上,则可把(3.43)质量矩阵通过幺正变换对角化. 我们用

$$\begin{aligned}U_{i\mathrm{L}}&=(u'_{\mathrm{L}},c'_{\mathrm{L}},t'_{\mathrm{L}}),\quad D_{i\mathrm{L}}=(d'_{\mathrm{L}},s'_{\mathrm{L}},b'_{\mathrm{L}}),\\U_{i\mathrm{R}}&=(u'_{\mathrm{R}},c'_{\mathrm{R}},t'_{\mathrm{R}}),\quad D_{i\mathrm{R}}=(d'_{\mathrm{R}},s'_{\mathrm{R}},b'_{\mathrm{R}})\end{aligned}\tag{3.44}$$

代表弱相互作用本征态的夸克场,则(3.43)式可改写为矩阵形式

$$\overline{U}_{\mathrm{L}}M^{\mathrm{u}}U_{\mathrm{R}}+\overline{D}_{\mathrm{L}}M^{\mathrm{d}}D_{\mathrm{R}}+h.c.,\tag{3.45}$$

其中

$$M^{\mathrm{u}}=\begin{pmatrix}m_{11}^{\mathrm{u}},m_{12}^{\mathrm{u}},m_{13}^{\mathrm{u}}\\m_{21}^{\mathrm{u}},m_{22}^{\mathrm{u}},m_{23}^{\mathrm{u}}\\m_{31}^{\mathrm{u}},m_{32}^{\mathrm{u}},m_{33}^{\mathrm{u}}\end{pmatrix},\tag{3.46}$$

$$M^{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix}m_{11}^{\mathrm{d}},m_{12}^{\mathrm{d}},m_{13}^{\mathrm{d}}\\m_{21}^{\mathrm{d}},m_{22}^{\mathrm{d}},m_{23}^{\mathrm{d}}\\m_{31}^{\mathrm{d}},m_{32}^{\mathrm{d}},m_{33}^{\mathrm{d}}\end{pmatrix}.\tag{3.47}$$

对 M^{u},M^{d} 总可找到四个幺正矩阵 $V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}$,$V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}}$,$V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}$,$V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}}$ 将其对角化,即

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}M^{\mathrm{u}}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}\dagger}&=\mathrm{diag}(m_{\mathrm{u}},m_{\mathrm{c}},m_{\mathrm{t}}),\\V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}M^{\mathrm{d}}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}\dagger}&=\mathrm{diag}(m_{\mathrm{d}},m_{\mathrm{s}},m_{\mathrm{b}}),\end{aligned}\tag{3.48}$$

(3.45)式改写为

$$\begin{aligned}&\overline{U}_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}\dagger}V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}M^{\mathrm{u}}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}\dagger}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}}U_{\mathrm{R}}+\overline{D}_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}\dagger}V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}M^{\mathrm{d}}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}\dagger}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}}D_{\mathrm{R}}+h.c.\\&=\overline{V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}U_{\mathrm{L}}}\begin{pmatrix}m_{\mathrm{u}}&&\\&m_{\mathrm{c}}&\\&&m_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}}U_{\mathrm{R}}+\overline{V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}D_{\mathrm{L}}}\begin{pmatrix}m_{\mathrm{d}}&&\\&m_{\mathrm{s}}&\\&&m_{\mathrm{b}}\end{pmatrix}V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}}D_{\mathrm{R}}+h.c.\\&=(\bar{u},\bar{c},\bar{t})_{\mathrm{L}}\begin{pmatrix}m_{\mathrm{u}}&&\\&m_{\mathrm{c}}&\\&&m_{\mathrm{t}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\c\\t\end{pmatrix}_{\mathrm{R}}+(\bar{d},\bar{s},\bar{b})_{\mathrm{L}}\begin{pmatrix}m_{\mathrm{d}}&&\\&m_{\mathrm{s}}&\\&&m_{\mathrm{b}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}_{\mathrm{R}}+h.c.,\end{aligned}\tag{3.49}$$

其中

$$\begin{pmatrix}u\\c\\t\end{pmatrix}_{\mathrm{L}}=V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}U_{\mathrm{L}}=V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}\begin{pmatrix}u'\\c'\\t'\end{pmatrix}_{\mathrm{L}},\quad\begin{pmatrix}u\\c\\t\end{pmatrix}_{\mathrm{R}}=V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}}U_{\mathrm{R}}=V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{u}}\begin{pmatrix}u'\\c'\\t'\end{pmatrix}_{\mathrm{R}},$$

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}} D_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{\mathrm{R}} = V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}} D_{\mathrm{R}} = V_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_{\mathrm{R}},$$

u,c,t,d,s,b 为夸克质量本征态．

在夸克质量本征态基底之上，可将带电流相互作用(3.41)式改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{int}} &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \overline{U}_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}\dagger} V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}} \gamma^{\mu} V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}\dagger} V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}} D_{\mathrm{L}} W_{\mu}^{+} + h.c. \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \overline{V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}} U_{\mathrm{L}}} \gamma^{\mu} V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}} V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}\dagger} (V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}} D_{\mathrm{L}}) W_{\mu}^{+} + h.c. \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t})_{\mathrm{L}} \gamma^{\mu} V_{\mathrm{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} W_{\mu}^{+} + h.c., \end{aligned} \tag{3.50}$$

其中

$$W_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{1\mu} \mp \mathrm{i} W_{2\mu}),$$

而

$$V_{\mathrm{CKM}} = V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}} V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}\dagger} \tag{3.51}$$

正是 CKM 矩阵[见(3.19)式].

从(3.48)式对角化公式，只有知道了(3.46)，(3.47)式中 M^{u}，M^{d} 每个矩阵元的值，才可能定出 $V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{u}}$，$V_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}$，从而定出(3.51)式中的 V_{CKM}．但这是不可能的，所以 V_{CKM} 只能靠实验来定．

§ 3.4 标准模型的 CP 破坏机制

本节将证明，正是 V_{CKM} 中的复位相 δ_{13} 使得 $V_{\mathrm{CKM}}^{*} \neq V_{\mathrm{CKM}}$，从而导致了 CP 破坏．这就是标准模型中 CP 破坏的根源．

实际上，只须证明作用量

$$S_{\mathrm{int}} = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\mathrm{int}} \tag{3.52}$$

破坏 CP 就足够了．以下我们不再区分带撇的量和不带撇的量，一律用夸克质量本征态，且

$$U_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad D_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}. \tag{3.53}$$

(3.50)式可化为

$$\mathscr{L}_{\rm int}=-\frac{g_2}{\sqrt{2}}(\overline{U}_{\rm L}\gamma^\mu V_{\rm CKM}D_{\rm L}W_\mu^+ +\overline{D}_{\rm L}\gamma^\mu V_{\rm CKM}^\dagger U_{\rm L}W_\mu^-). \tag{3.54}$$

在 Bjorken-Drell 度规下，

$$\boldsymbol{x}^\mu=(t,\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}_\mu=(t,-\boldsymbol{x}).$$

x^μ 在 C 变换下不变，在 P 变换下

$$(x^\mu)^P=x_\mu=(t,-\boldsymbol{x}).$$

在 CP 变换下由(2.8)，(2.10)式有

$$\begin{aligned}&U_{\rm L}^{CP}(x)=C\gamma^0U_{\rm L}^{P*}(x)=C\gamma^0(\gamma^0U_{\rm L}^*(x^P))=CU_{\rm L}^*(x^P),\\&D_{\rm L}^{CP}(x)=CD_{\rm L}^*(x^P),\quad C=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0.\end{aligned} \tag{3.55}$$

由(2.73)，(3.51)式，在 CP 变换下

$$W_\mu^\pm(x)\xrightarrow{CP}-W^{\mp\mu}(x^P), \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_{\rm L}^{CP}\gamma^\mu V_{\rm CKM}D_{\rm L}^{CP}(W_\mu^+)^{CP}&=U_{{\rm L}i}^{\rm T}(x^P)C^\dagger\gamma^0\gamma^\mu V_{\rm CKM}^{ij}CD_{{\rm L}j}^*(x^P)(-W^{-\mu}(x^P))\\&=U_{{\rm L}i}^{\rm T}(x^P)C^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0V_{\rm CKM}^{ij}CD_{{\rm L}j}^*(x^P)[-W^{-\mu}(x^P)]\\&=-U_{{\rm L}i}^{\rm T}(x^P)\gamma_\mu^{\rm T}\gamma^{0{\rm T}}V_{\rm CKM}^{ij}D_{{\rm L}j}^*(x^P)W^{-\mu}(x^P),\end{aligned} \tag{3.57}$$

最后一步用了 $C^\dagger\gamma_\mu C=-\gamma_\mu^{\rm T}$，$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0=\gamma_\mu$，$\gamma^{0{\rm T}}=\gamma^0$，$\gamma^0C=-C\gamma^0$．对(3.57)式实行转置还是它自己．注意 $U_{{\rm L}i}^{\rm T}$ 与 $U_{{\rm L}j}^*$ 交换出负号，

$$\begin{aligned}\overline{U}_{\rm L}^{CP}\gamma^\mu V_{\rm CKM}D_{\rm L}^{CP}(W_\mu^+)^{CP}&=D_{{\rm L}j}^+(x^P)\gamma^0\gamma^\mu V_{\rm CKM}^{ij}U_{{\rm L}i}(x^P)W^{-\mu}(x^P)\\&=\overline{D}_{\rm L}(x^P)\gamma_\mu V_{\rm CKM}^{\rm T}U_{\rm L}(x^P)W^{-\mu}(x^P).\end{aligned}$$

同样可证，

$$\overline{D}_{\rm L}^{CP}\gamma^\mu V_{\rm CKM}^\dagger U_L^{CP}(W_\mu^-)^{CP}=\overline{U}_{\rm L}(x^P)\gamma_\mu V_{\rm CKM}^*D_{\rm L}(x^P)W^{+\mu}(x^{\rm P}), \tag{3.58}$$

其中用了

$$(V_{\rm CKM}^\dagger)^{ij}=V_{\rm CKM}^{*ji}. \tag{3.59}$$

因此，$\mathscr{L}_{\rm int}(x)$在 CP 变换下变为

$$\mathscr{L}_{\rm int}^{CP}=-\frac{g_2}{\sqrt{2}}[\overline{D}_{\rm L}(x^P)\gamma^\mu V_{\rm CKM}^{\rm T}U_{\rm L}(x^P)W_\mu^-(x^P)+\overline{U}_{\rm L}(x^P)\gamma^\mu V_{\rm CKM}^*D_{\rm L}(x^P)W_\mu^+(x_P)]. \tag{3.60}$$

由于作用量 $S_{\rm int}$ 是对 $\mathscr{L}_{\rm int}$ 的全时空积分，所以$\int{\rm d}^4x$ 与$\int{\rm d}^4x^P$ 等价．因此，若 $\mathscr{L}_{\rm int}$ 在 CP

变换下只是 $x \to x^P$，则 $S_{\rm int} = S_{\rm int}^{CP}$. 比较(3.60) 与(3.54) 式发现，只有

$$V_{\rm CKM}^{*} = V_{\rm CKM}, \quad V_{\rm CKM}^{\rm T} = V_{\rm CKM} \tag{3.61}$$

时才有可能满足这一条件．但(3.61)式不可能成立，因为 $V_{\rm CKM}$ 矩阵元有复数相位 δ_{13}.

以上讨论证明了作用量 $S_{\rm int}$ 在 CP 变换下改变，因而标准模型破坏 CP 不变性．以后会看到，所有 CP 破坏的量都依赖于 $\sin\delta_{13}$，因此复数位相 δ_{13} 的存在是 CP 破坏的关键．

§ 3.5　CKM 矩阵的参数化及其在位相变换下的不变量

$V_{\rm CKM}$ 矩阵是 3×3 幺正矩阵，其矩阵元只能依靠实验来确定．国际粒子数据组(Particle Data Group)建议如下的参数化形式[4]，即(3.19)式可写为

$$V_{\rm CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}{\rm e}^{-{\rm i}\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}{\rm e}^{{\rm i}\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}{\rm e}^{{\rm i}\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}{\rm e}^{{\rm i}\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}{\rm e}^{{\rm i}\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \tag{3.62}$$

其中 $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$，$c_{ij} = \cos\theta_{ij}$.

还有一种常用的参数化方案，即 Wolfenstein 方案[5]：

$$V_{\rm CKM} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - {\rm i}\eta) \\ -\lambda & 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-{\rm i}\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4), \tag{3.63}$$

其中 $V_{us} = s_{12}c_{13} = \lambda$，$V_{cb} = A\lambda^2$，$V_{ub} = s_{13}{\rm e}^{-{\rm i}\delta_{13}} = A\lambda^3(\rho - {\rm i}\eta)$，$\delta_{13} = \tan^{-1}\dfrac{\eta}{\rho}$. 准确至 λ^5 项的表达式为

$$V_{\rm CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda^2}{2}-\dfrac{\lambda^4}{8} & \lambda & A\lambda^3(\rho - {\rm i}n) \\ -\lambda + A\lambda^5\left(\dfrac{1}{2}-\rho-{\rm i}\eta\right) & 1-\dfrac{\lambda^2}{2}-\dfrac{\lambda^4}{8}(1+4A^2) & A\lambda^2 \\ A\lambda^3\left[1-(\rho+{\rm i}\eta)\left(1-\dfrac{\lambda^2}{2}\right)\right] & -A\lambda^2 + A\lambda^4\left(\dfrac{1}{2}-\rho-{\rm i}\eta\right) & 1-\dfrac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix} + O(\lambda^6). \tag{3.64}$$

文献中还有很多其他参数化方案，这里就不逐一介绍了．

须指出，V_{CKM}矩阵元的位相是可以改变的．实际上对每个夸克场，它的位相是不可测量的，因而是任意的．例如，(3.50)式带电流中的夸克场做如下的变换：

$$\begin{cases} u_{\mathrm{L}} \to e^{i\varphi_u} u_{\mathrm{L}}, c_{\mathrm{L}} \to e^{i\varphi_c} c_{\mathrm{L}}, t_{\mathrm{L}} \to e^{i\varphi_t} t_{\mathrm{L}}, \\ d_{\mathrm{L}} \to e^{i\varphi_d} d_{\mathrm{L}}, s_{\mathrm{L}} \to e^{i\varphi_s} s_{\mathrm{L}}, b_{\mathrm{L}} \to e^{i\varphi_b} b_{\mathrm{L}}, \end{cases} \tag{3.65}$$

则

$$V_{\mathrm{CKM}} \to V'_{\mathrm{CKM}} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_u} & & \\ & e^{-i\varphi_c} & \\ & & e^{-i\varphi_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_d} & & \\ & e^{i\varphi_s} & \\ & & e^{i\varphi_b} \end{pmatrix}, \tag{3.66}$$

V'_{CKM}的矩阵元为

$$V'_{j\alpha} = e^{i(\varphi_\alpha - \varphi_j)} V_{j\alpha}, \tag{3.67}$$

其中 $j=u,c,t$，$\alpha=d,s,b$. 这样一来，V_{CKM}的每一列或每一行都可以同时改变同样的位相，特别是某一列或某一行可同时改变符号．显然，夸克场的位相改变不改变拉氏函数的形式，只是

$$V_{\mathrm{CKM}} \to V'_{\mathrm{CKM}},$$

当然物理也不会改变．因此，物理观测量在(3.67)式的变换下不变．V_{CKM}在(3.67)式的位相变换下一个重要的不变量为[6,7]

$$\Delta_{i\alpha} = V_{j\beta} V_{k\gamma} V^*_{j\gamma} V^*_{k\beta}, \tag{3.68}$$

其中(i,j,k)，(α,β,γ)都取 1,2,3 的联合循环值，且重复指标不求和，例如

$$\Delta_{22} = V_{33} V_{11} V^*_{31} V^*_{13}. \tag{3.69}$$

$\Delta_{i\alpha}$共有 9 个不变量，且它们的虚部都相同，但实部不同．

$$\mathrm{Im}(V_{j\beta} V_{k\gamma} V^*_{j\gamma} V^*_{k\beta}) = J \sum_l \epsilon_{jkl} \sum_\alpha \epsilon_{\beta\gamma\alpha}, \tag{3.70}$$

其中

$$J = c_{12} c_{13}^2 c_{23} s_{12} s_{13} s_{23} \sin\delta_{13} \approx A^2 \lambda^6 \eta, \tag{3.71}$$

c_{ij}，s_{ij}，δ_{ij}，A，λ，η 的定义见(3.62)，(3.63)式．J 的大小正好描述 CP 破坏的强度，这点后面会看到．

§3.6 幺正三角形

V_{CKM}是幺正矩阵，其幺正条件为

$$\sum_i V_{ik} V^*_{il} = \delta_{kl}, \quad \sum_i V_{ji} V^*_{ki} = \delta_{jk}. \tag{3.72}$$

上式第一式是 V_{CKM} 列之间的复正交条件,第二式是行之间的复正交条件.

(3.72)式中共有六个方程:

$$\begin{aligned}
&V_{ud}V_{ub}^{*}+V_{cd}V_{cb}^{*}+V_{td}V_{tb}^{*}=0,\\
&V_{us}V_{ub}^{*}+V_{cs}V_{cb}^{*}+V_{ts}V_{tb}^{*}=0,\\
&V_{ud}V_{us}^{*}+V_{cd}V_{cs}^{*}+V_{td}V_{ts}^{*}=0,\\
&V_{ud}V_{cb}^{*}+V_{us}V_{cs}^{*}+V_{ub}V_{cb}^{*}=0,\\
&V_{ud}V_{td}^{*}+V_{us}V_{ts}^{*}+V_{ub}V_{tb}^{*}=0,\\
&V_{cd}V_{td}^{*}+V_{cs}V_{ts}^{*}+V_{cb}V_{tb}^{*}=0.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

(3.73)式每个等式在复平面上画出来都是一个封闭的三角形,称为幺正三角形.这是因为它们源自 V_{CKM} 的幺正条件.每个三角形的面积都等于 $\frac{1}{2}J$.

如果 $\delta_{13}=0$,则 $J=0$,(3.73)式中六个三角形都退化为一条直线.

六个三角形的面积都为 $\frac{1}{2}J$,说明它们都与 CP 破坏有关,因为以后的章节会指出,CP 不对称性都正比于 J.因此每个幺正三角形的边长和夹角都与物理观测量相关.但由于实验精度的限制,只有三个边长相差不大的三角形才容易被测量.符合这个条件的三角形有一个,即

$$V_{ud}V_{ub}^{*}+V_{cd}V_{cb}^{*}+V_{td}V_{tb}^{*}=0, \tag{3.74}$$

在复平面上的图示见图 3.1.

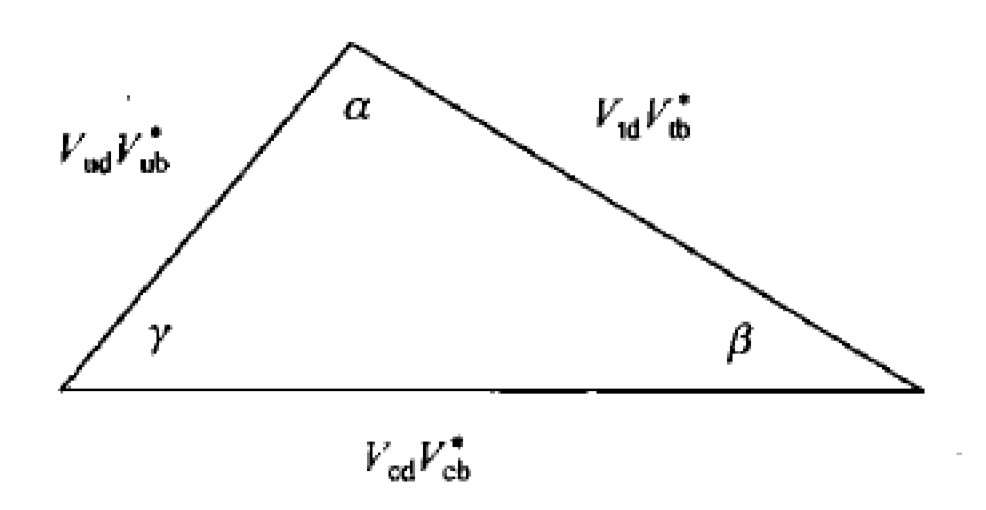


图 3.1 幺正三角形在复平面上的示意图

此三角形的三个内角的定义如下:

$$\begin{aligned}
\alpha&=\arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^{*}}{V_{ud}V_{ub}^{*}}\right)\equiv\varphi_2,\\
\beta&=\arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^{*}}{V_{td}V_{tb}^{*}}\right)\equiv\varphi_1,\\
\gamma&=\arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^{*}}{V_{cd}V_{cb}^{*}}\right)\equiv\varphi_3.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

有关(3.75)式中幺正三角形三个内角的测量将在第六章中讨论．对于 CKM 矩阵元的测量，实验已给出结果．最近的数据请参阅参考文献[4].

参考文献

[1] Cabibbo N. Phys. Rev. Lett., 1963, 10: 531; Phys. Rev. Lett., 1964, 12: 62.
[2] Glashow S, Iliopoulos J, Maiani L. Phys. Rev. D, 1970, 2: 1285.
[3] Kobayashi M, Maskawa T. Prog. Theor. Phys., 1973, 49: 652.
[4] Nakamura K, et al. (PDG). J. of Phys. G, 2010, 37: 075021.
[5] Wolfenstein L. Phys. Rev. Lett., 1983, 51: 1945.
[6] Wu D D. Phys. Rev. D, 1986, 33: 860.
[7] Jarlskog C. Phys. Rev. Lett., 1985, 55: 1039.

第四章　中性粒子系统 *CP* 破坏的量子力学描述

我们这里讲的中性粒子系统是指中性粒子与其反粒子是可区分的不同粒子的系统. π^0 不属这一类,因其反粒子与粒子相同.

用 P^0 代表中性粒子,其反粒子 $\overline{P}^0$ 与 P^0 不同,可以用某种内部量子数区分开. 所以 P^0 可以是 K^0,D^0,B_d^0,B_S^0,中子 n,中微子 ν_e,ν_μ,ν_τ,等等. 如果只有强相互作用和电磁相互作用,则 P^0,$\overline{P}^0$ 都是稳定粒子且有相同的质量. 当有弱相互作用时 P^0,$\overline{P}^0$ 则要衰变. 如果有共同的衰变末态(实态和虚态),则 P^0,$\overline{P}^0$ 可以相互转换(振荡).

§4.1　有效哈密顿量和薛定谔方程

对任意时刻 t,描写 P^0,$\overline{P}^0$ 系统的态矢量可写为

$$|\Phi(t)\rangle = a(t)|P^0\rangle + b(t)|\overline{P}^0\rangle + C_1(t)|n_1\rangle + C_2(t)|n_2\rangle + \cdots, \tag{4.1}$$

其中 $|n_1\rangle$,$|n_2\rangle$ 是 P^0,$\overline{P}^0$ 都可衰变到的末态,t 是 P^0 或 $\overline{P}^0$ 静止系内测得的时间,即固有时. 态矢量(4.1)式随时间变化的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle = H|\Phi(t)\rangle. \tag{4.2}$$

(4.2)式是一个希尔伯特空间的无穷维的方程,H 是希尔伯特空间的无穷维的厄米矩阵. 目前我们还没有办法求解这个方程,但是我们可以先考虑我们感兴趣的情形[1,2]:初态只是 $|P^0\rangle$,$|\overline{P}^0\rangle$ 的线性组合,即 $|\psi(0)\rangle = a(0)|P^0\rangle + b(0)|\overline{P}^0\rangle$;我们只关心系数 $a(t)$,$b(t)$;我们只考虑比强相互作用时间尺度大得多的时间 t,这正是 Weisskopf-Wigner 近似[3].

在上述条件下情况就大大简化了. 我们可以把任意时刻 t 感兴趣的态矢量写为

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|P^0\rangle + b(t)|\overline{P}^0\rangle. \tag{4.3}$$

若在以 $|P^0\rangle$,$|\overline{P}^0\rangle$ 为基矢的子空间写下上面的态矢,则有

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

其相应的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=H\psi(t). \tag{4.5}$$

这里 H 是 2×2 的矩阵并且不可能是厄米的，因 P^0，$\overline{\mathrm{P}}^0$ 都会衰变，H 必然含有虚部.

不失普遍性，(4.5)式中的 H 可写为

$$H=M-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma=\begin{pmatrix} M_{11}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{11}, M_{12}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12} \\ M_{21}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{21}, M_{22}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

其中，$H=H_{\mathrm{st}}+H_{\gamma}+H_{\mathrm{w}}$，$H_{\mathrm{st}}$——强相互作用哈密顿量，$H_{\gamma}$——电磁相互作用哈密顿量，$H_{\mathrm{w}}$——弱相互作用哈密顿量 . M 和 Γ 都是 2×2 的厄米矩阵，即 $M=M^{+}$，$\Gamma=\Gamma^{+}$. 值得指出的是，(4.5)式中的时间 t 是固有时(即 P^0，$\overline{\mathrm{P}}^0$ 都静止的参考系中的时间).

$$M_{ij}=m_{\mathrm{P}}\delta_{ij}+\langle i\mid H_{\mathrm{w}}\mid j\rangle+\sum_{n}\mathscr{P}\frac{\langle i\mid H_{\mathrm{w}}\mid n\rangle\langle n\mid H_{\mathrm{w}}\mid j\rangle}{m_{\mathrm{P}}-E_{n}}, \tag{4.7}$$

$$\Gamma_{ij}=2\pi\sum_{n}\delta(m_{\mathrm{P}}-E_{n})\langle i|H_{\mathrm{w}}|n\rangle\langle n|H_{\mathrm{w}}|j\rangle,$$

上式中，i，j 取为 $|\mathrm{P}^0\rangle$ 和 $|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle$，$m_{\mathrm{P}}$ 为 P^0 或 $\overline{\mathrm{P}}^0$ 粒子的质量，$\mathscr{P}$ 指取主值运算. (4.7)式的详细推导可参阅[4].

§4.2 CPT,CP,T 变换对有效哈密顿量的限制

因 T 变换为反幺正算符，在讨论 CPT，CP，T 变换对有效哈密顿量的限制之前，我们先来回顾一下反幺正算符的性质是必要的 .

任意一个反幺正算符 A 可写成一个幺正算符 U 和一个对 c-数取复数共轭的算子 K 的乘积，即

$$A=UK. \tag{4.8}$$

假定 A 把 $|\psi\rangle$ 和 $|\chi\rangle$ 分别变到

$$\begin{aligned} |\psi_A\rangle&=A|\psi\rangle, \\ |\chi_A\rangle&=A|\chi\rangle, \end{aligned} \tag{4.9}$$

则

$$\begin{aligned}\langle\chi_A|\psi_A\rangle&=\langle\chi|A^{+}A|\psi\rangle=\langle\chi|K^{+}U^{+}UK|\psi\rangle \\ &=\langle\chi^{*}|\psi^{*}\rangle=\langle\chi|\psi\rangle^{*}=\langle\chi|\psi\rangle^{+}=\langle\psi|\chi\rangle. \end{aligned} \tag{4.10}$$

以上用了 $K^\dagger$ 是对左边的$\langle\chi|$取复数共轭这一约定．也可由(4.9)式得

$$|\chi_A\rangle=A|\chi\rangle=UK|\chi\rangle=U|\chi^*\rangle,$$

则

$$\langle\chi_A|=|\chi_A\rangle^\dagger=(U|\chi^*\rangle)^\dagger=\langle\chi^*|U^\dagger,$$

因而有

$$\langle\chi_A|\psi_A\rangle=\langle\chi^*|U^\dagger UK|\psi\rangle=\langle\chi^*|\psi^*\rangle=\langle\psi|\chi\rangle,$$

即(4.10)式．利用(4.8)式，我们可导出

$$A|\psi\rangle=|\psi_A\rangle=U|\psi^*\rangle, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}A(c_1|\psi\rangle+c_2|\chi\rangle)&=U(c_1^*|\psi^*\rangle+c_2^*|\chi^*\rangle)\\&=c_1^*|\psi_A\rangle+c_2^*|\chi_A\rangle.\end{aligned} \tag{4.12}$$

因算符 K 是对它右边的所有 c-数取复共轭，所以

$$K^2=1,\quad K^{-1}=K,\quad A^{-1}=K^{-1}U^{-1}=KU^\dagger. \tag{4.13}$$

对任何算符 O，我们可把它理解成复数组成的方阵，可定义

$$O_A=AOA^{-1}=UKOKU^\dagger=UO^*U^\dagger. \tag{4.14}$$

由此可导出一个重要的等式：

$$\begin{aligned}\langle\chi_A|O_A|\psi_A\rangle&=\langle\chi|A^\dagger(AOA^{-1})A|\psi\rangle\\&=\langle\chi|K^\dagger U^\dagger(UO^*U^\dagger)UK|\psi\rangle\\&=\langle\chi^*|O^*|\psi^*\rangle=\langle\chi|O|\psi\rangle^*=\langle\psi|O^\dagger|\chi\rangle,\end{aligned} \tag{4.15}$$

因此我们有

$$\langle\chi|O|\psi\rangle=\langle\chi_A|O_A|\psi_A\rangle^*. \tag{4.16}$$

(4.16)式在后面将经常用到．

现在我们可以讨论 CP,T,CPT 变换对有效哈密顿量的限制，即对矩阵 M,Γ 的限制了．

由(4.7)式，有

$$\Gamma_{11}=2\pi\sum_n\delta(m_{\mathrm{P}}-E_n)\langle\mathrm{P}^0|H_{\mathrm{w}}|n\rangle\langle n|H_{\mathrm{w}}|\mathrm{P}^0\rangle, \tag{4.17}$$

令

$$\begin{aligned}&H_{CP}\equiv(CP)H_{\mathrm{w}}(CP)^\dagger,\\&H_{CPT}=(CPT)H_{\mathrm{w}}(CPT)^{-1},\\&H_T=T\mathrm{H}_{\mathrm{w}}T^{-1},\end{aligned} \tag{4.18}$$

选择$(CP)^2=1$，可定义

$$\begin{aligned}&CP|\mathrm{P}^0\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle,\\&CP|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}|P^0\rangle,\end{aligned} \tag{4.19}$$

同样可以定义

$$
\begin{aligned}
CPT|P^0\rangle &= e^{i\nu}|\overline{P}^0\rangle, \\
CPT|\overline{P}^0\rangle &= e^{i\nu}|P^0\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

对(4.20)式两边的左方作用 CP,利用(4.19)式,则有

$$
\begin{aligned}
T|P^0\rangle &= e^{i(\nu-\xi)}|P^0\rangle, \\
T|\overline{P}^0\rangle &= e^{i(\nu+\xi)}|\overline{P}^0\rangle,
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

这里 ξ,ν 都是任意相因子.

先看 CP 对 Γ_{11} 的限制. 注意

$$
(CP)^\dagger(CP)=(CP)(CP)^\dagger=1, \tag{4.22}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= 2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle P^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|P^0\rangle \\
&= 2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle P^0|(CP)^\dagger(CP)H_w(CP)^\dagger(CP)|n\rangle \\
&\quad \langle n|(CP)^\dagger(CP)H_w(CP)^\dagger(CP)|P^0\rangle \\
&= 2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle\overline{P}^0|e^{-i\xi}H_{CP}e^{i\xi_n}|\overline{n}\rangle\langle\overline{n}|e^{-i\xi_n}H_{CP}|e^{i\xi}|\overline{P}^0\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

(4.23)式最后一步用了(4.22)和(4.19)式. 考虑到对 $|n\rangle$ 和 $|\overline{n}\rangle$ 求和是等价的,则(4.23)式变为

$$
\Gamma_{11}=2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle\overline{P}^0|H_{CP}|n\rangle\langle n|H_{CP}|\overline{P}^0\rangle. \tag{4.24}
$$

CP 不变即 $H_{CP}=H_w$ 导致

$$
\Gamma_{11}=\Gamma_{22}. \tag{4.25}
$$

由于

$$
M_{11}=m_P+\langle P^0|H_w|P^0\rangle+\sum_n \mathscr{P}\frac{\langle P^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|P^0\rangle}{m_P-E_n}, \tag{4.26}
$$

(4.26)式最后一项与 Γ_{11} 表式类似,因此有

$$
\sum_n \mathscr{P}\frac{\langle P^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|P^0\rangle}{m_P-E_n}=\sum_n \mathscr{P}\frac{\langle\overline{P}^0|H_{CP}|n\rangle\langle n|H_{CP}|\overline{P}^0\rangle}{m_P-E_n}. \tag{4.27}
$$

(4.26)式第二项

$$
\begin{aligned}
\langle P^0|H_w|P^0\rangle &= \langle P^0|(CP)^\dagger(CP)H_w(CP)^\dagger(CP)|P^0\rangle \\
&= \langle\overline{P}^0|e^{-i\xi}H_{CP}e^{i\xi}|\overline{P}^0\rangle
\end{aligned}
$$

$$=\langle \overline{P}^0 | H_{CP} | \overline{P}^0 \rangle. \tag{4.28}$$

若 CP 不变即 $H_{CP}=H_w$，则由(4.26)～(4.28)式可得

$$M_{11}=M_{22}. \tag{4.29}$$

再看 Γ_{12}.

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}&=2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle P^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\overline{P}^0\rangle\\&=(2\pi)\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle P^0|(CP)^\dagger(CP)H_w(CP)^\dagger(CP)|n\rangle\\&\quad\langle n|(CP)^\dagger(CP)H_w(CP)^\dagger(CP)|\overline{P}^0\rangle\\&=2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle \overline{P}^0|e^{-i\xi}H_{CP}e^{i\xi_n}|\overline{n}\rangle\langle \overline{n}|e^{-i\xi_n}H_{CP}e^{-i\xi}|P^0\rangle\\&=e^{-2i\xi}(2\pi)\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle \overline{P}^0|H_{CP}|\overline{n}\rangle\langle \overline{n}|H_{CP}|P^0\rangle\\&=e^{-2i\xi}(2\pi)\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle \overline{P}^0|H_{CP}|n\rangle\langle n|H_{CP}|P^0\rangle.\end{aligned} \tag{4.30}$$

若 $H_{CP}=H_w$，则有

$$\Gamma_{12}=e^{-2i\xi}\Gamma_{21}. \tag{4.31}$$

类似地，有

$$M_{12}=e^{-2i\xi}M_{21}. \tag{4.32}$$

现在看 CPT 不变性对 M_{ij}，Γ_{ij} 的限制.

由(4.16)式，有

$$\begin{aligned}|P_A^0\rangle&=CPT|P^0\rangle=e^{i\nu}|\overline{P}^0\rangle,\\|\overline{P}_A^0\rangle&=CPT|\overline{P}^0\rangle=e^{i\nu}|P^0\rangle,\\|n_A\rangle&=CPT|n\rangle=e^{i\nu_n}|\overline{n}\rangle,\end{aligned} \tag{4.33}$$

则由(4.16)式，得

$$\begin{aligned}\langle P^0|H_w|n\rangle&=\langle P_A^0|H_{CPT}|n_A\rangle^*\\&=(e^{-i\nu}\langle \overline{P}^0|H_{CPT}|\overline{n}\rangle e^{i\nu_n})^*\\&=e^{i(\nu-\nu_n)}\langle \overline{P}^0|H_{CPT}|\overline{n}\rangle^*,\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\langle n|H_w|P^0\rangle&=\langle n_A|H_{CPT}|P_A\rangle^*\\&=(e^{-i\nu_n}\langle \overline{n}|H_{CPT}|e^{i\nu}\overline{P}^0\rangle)^*\\&=e^{i(\nu_n-\nu)}\langle \overline{n}|H_{CPT}|\overline{P}^0\rangle^*,\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}&=2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)\langle P^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|P^0\rangle\\&=2\pi\sum_n \delta(m_P-E_n)e^{i(\nu-\nu_n)}e^{i(\nu_n-\nu)}\langle \overline{P}^0|H_{CPT}|\overline{n}\rangle^*\langle \overline{n}|H_{CPT}|\overline{P}^0\rangle^*\end{aligned}$$

$$=2\pi\sum_n\delta(m_{\rm P}-E_n)(\langle\overline{\rm P}^0|H_{CPT}|n\rangle\langle n|H_{CPT}|\overline{\rm P}^0\rangle)^*. \qquad (4.36)$$

若 CPT 不变,$H_{CPT}=H_{\rm w}$,则有

$$\Gamma_{11}=\Gamma_{22}. \qquad (4.37)$$

类似地可证明,在 CPT 不变条件下

$$M_{11}=M_{22}. \qquad (4.38)$$

由

$$\Gamma_{12}=2\pi\sum_n\delta(m_{\rm P}-E_n)\langle{\rm P}^0|H_{\rm w}|n\rangle\langle n|H_{\rm w}|\overline{\rm P}^0\rangle$$

及(4.34),(4.35)式,可得

$$\Gamma_{12}=(2\pi)\sum_n\delta(m_{\rm P}-E_n)\langle\overline{\rm P}^0|H_{CPT}|\overline{n}\rangle^*\langle\overline{n}|H_{CPT}|{\rm P}^0\rangle^*$$

$$=2\pi\sum_n\delta(m_{\rm P}-E_n)(\langle\overline{\rm P}^0|H_{CPT}|n\rangle\langle n|H_{CPT}|{\rm P}^0\rangle)^*. \qquad (4.39)$$

若 CPT 不变,则 $H_{CPT}=H_{\rm w}$,又因 $H_{\rm w}^\dagger=H_{\rm w}$,则

$$(\langle\overline{\rm P}^0|H_{\rm w}|n\rangle\langle n|H_{\rm w}|{\rm P}^0\rangle)^*$$
$$=\langle{\rm P}^0|H_{\rm w}|n\rangle\langle n|H_{\rm w}|\overline{\rm P}^0\rangle,$$

代入(4.39)式,给出

$$\Gamma_{12}=\Gamma_{12}. \qquad (4.40)$$

类似地有,CPT 不变给出

$$M_{12}=M_{12}. \qquad (4.41)$$

(4.40),(4.41)式表明,CPT 不变对 Γ_{ij},M_{ij} 在 $i\neq j$ 时无任何限制.

再看 T 变换.

同样,利用(4.16)式和(4.21)式,可得

$$\langle{\rm P}^0|H_{\rm w}|n\rangle=[{\rm e}^{-{\rm i}(\nu-\xi)}\langle{\rm P}^0|H_T|n\rangle{\rm e}^{{\rm i}(\nu_n-\xi_n)}]^*$$
$$={\rm e}^{{\rm i}(\nu-\xi)}{\rm e}^{-{\rm i}(\nu_n-\xi_n)}\langle{\rm P}^0|H_T|n\rangle^*,$$
$$\langle n|H_{\rm w}|{\rm P}^0\rangle={\rm e}^{{\rm i}(\nu_n-\xi_n)}{\rm e}^{-{\rm i}(\nu-\xi)}\langle n|H_T|{\rm P}^0\rangle^*, \qquad (4.42)$$
$$\langle{\rm P}^0|H_{\rm w}|n\rangle\langle n|H_{\rm w}|{\rm P}^0\rangle=(\langle{\rm P}^0|H_T|n\rangle\langle n|H_T|{\rm P}^0\rangle)^*.$$

T 不变即 $H_T=H_{\rm w}$ 使得(4.42)式右边变得与左边一样,即

$$\Gamma_{11}=\Gamma_{11}. \qquad (4.43)$$

同样可得

$$M_{11}=M_{11},M_{22}=M_{22},\Gamma_{22}=\Gamma_{22}, \qquad (4.44)$$

即 T 不变对 Γ_{ii},M_{ii} 无限制.

再看 Γ_{12}. 由(4.16)式及(4.21)式,可得

$$\begin{aligned}
&\langle P^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\overline{P}^0\rangle \\
&=(e^{-i(\nu-\xi)}\langle P^0|H_T|n\rangle e^{i(\nu_n-\xi_n)}e^{-i(\nu_n-\xi_n)}\langle n|H_T|\overline{P}^0\rangle e^{i(\nu+\xi)})^* \\
&=e^{-2i\xi}(\langle P^0|H_T|n\rangle\langle n|H_T|\overline{P}^0\rangle)^*, \\
&\Gamma_{12}=2\pi\sum_n\delta(m_P-E_n)\langle P^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\overline{P}^0\rangle \\
&\quad=2\pi\sum_n\delta(m_P-E_n)e^{-2i\xi}(\langle P^0|H_T|n\rangle\langle n|H_T|\overline{P}^0\rangle)^*.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

若 T 不变,$H_T=H_w$,$(\langle P^0|H_T|n\rangle\langle n|H_T|\overline{P}^0\rangle)^*=\langle\overline{P}^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|P^0\rangle$,则有

$$\Gamma_{12}=e^{-2i\xi}\Gamma_{21}. \tag{4.46}$$

同样可得

$$M_{12}=e^{-2i\xi}M_{21}. \tag{4.47}$$

现在可以把 CP,CPT,T 变换不变对 M_{ij},Γ_{ij} 的限制列入下表:

表 4.1 分立对称对 Γ_{ij},M_{ij} 的限制[ξ 为 CP 相角(4.19)式]

对称性	对角元	非对角元
CPT	$\Gamma_{11}=\Gamma_{22}$,$M_{11}=M_{22}$	无限制
CP	$\Gamma_{11}=\Gamma_{22}$,$M_{11}=M_{22}$	$M_{12}=e^{-2i\xi}M_{21}$,$\Gamma_{12}=e^{-2i\xi}\Gamma_{21}$
T	无限制	$M_{12}=e^{-2i\xi}M_{21}$,$\Gamma_{12}=e^{-2i\xi}\Gamma_{21}$

从表 4.1 可以看出,虽然 CP 和 T 不变对 M_{12},Γ_{12} 没有一目了然的限制,但对 $M_{12}^*\Gamma_{12}$ 有清楚的限制.实际上,因 $M^\dagger=M$,$\Gamma^\dagger=\Gamma$,即 $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}^*$,$M_{12}=M_{21}^*$,有

$$M_{12}^*\Gamma_{12}=(e^{-2i\xi}M_{21})^*e^{-2i\xi}\Gamma_{21}=M_{21}^*\Gamma_{21}=M_{12}\Gamma_{12}^*,$$

因此有

$$\mathrm{Im}(M_{12}^*\Gamma_{12})=0. \tag{4.48}$$

所以 $\mathrm{Im}(M_{12}^*\Gamma_{12})$ 与 CP 或 T 破坏的大小有关. 如果我们取定相角 $\xi=0$,即(4.19)式变为

$$CP|P^0\rangle=|\overline{P}^0\rangle,CP|\overline{P}^0\rangle=|P^0\rangle, \tag{4.49}$$

则由表 4.1 可得出

$$M_{12}=M_{21}=M_{12}^*,\Gamma_{12}=\Gamma_{21}=\Gamma_{12}^*,$$

即

$$\mathrm{Im}M_{12}=\mathrm{Im}\Gamma_{12}=0. \tag{4.50}$$

显然(4.50)式与相位取法有关，因此不是物理的. 只有(4.48)式才是与 ξ 取法无关的，因而具有物理意义.

有关分立变换对有效哈密顿量的限制的详细讨论可参阅 Branco 等人的书[5].

由(4.6)式和表 4.1 可得出

$$H_{12}=M_{12}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}\xrightarrow{CP\text{ 或 }T\text{ 不变}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}H_{21},$$

$$H_{21}=M_{21}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{21}\xrightarrow{CP\text{ 或 }T\text{ 不变}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\xi}H_{12},$$

所以 CP 或 T 不变导致

$$|H_{12}|=|H_{21}|, \tag{4.51}$$

因此，可定义一个无量纲的 T 或 CP 破坏的实参数

$$\delta=\frac{|H_{12}|-|H_{21}|}{|H_{12}|+|H_{21}|} \tag{4.52}$$

和 CPT 或 CP 破坏的无量纲复参数

$$\theta=\frac{H_{22}-H_{11}}{\Delta\mu}, \tag{4.53}$$

其中质量差 $\Delta\mu$ 见后面的(4.57)式.

§4.3　有效哈密顿量的质量本征态

有效哈密顿量(4.6)的质量本征态可写为

$$\begin{aligned}|\mathrm{P}_{\mathrm{H}}^{0}\rangle&=p_{\mathrm{H}}|\mathrm{P}^{0}\rangle-q_{\mathrm{H}}|\overline{\mathrm{P}}^{0}\rangle\sim\mathrm{K}_{\mathrm{L}},\\|\mathrm{P}_{\mathrm{L}}\rangle&=p_{\mathrm{L}}|\mathrm{P}^{0}\rangle+q_{\mathrm{L}}|\overline{\mathrm{P}}^{0}\rangle\sim\mathrm{K}_{\mathrm{S}},\end{aligned} \tag{4.54}$$

归一化条件为

$$|p_{\mathrm{H}}|^2+|q_{\mathrm{H}}|^2=|p_{\mathrm{L}}|^2+|q_{\mathrm{L}}|^2=1.$$

这里下标 L，H 表示质量的轻、重. 这种标记在描写重介子系统时普遍采用，但在描述中性 K 介子系统时，因长寿命和短寿命 K 介子的寿命相差 500 多倍，故用寿命长短标记更方便. 这里 K_{L} 为长寿命介子，K_{S} 为短寿命介子.

由有效哈密顿量 $H_{ij}=M_{ij}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{ij}$ 可写出其本征方程

$$\begin{pmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

解得本征值为

$$\mu_{\mathrm{H,L}}=\frac{H_{11}+H_{22}\pm\sqrt{4H_{12}H_{21}+(H_{22}-H_{11})^2}}{2}, \tag{4.56}$$

$$\Delta\mu=\mu_{\mathrm{H}}-\mu_{\mathrm{L}}=\sqrt{4H_{12}H_{21}+(H_{22}-H_{11})^2}. \tag{4.57}$$

由(4.54),(4.55)式,对应 μ_{H} 的本征矢(质量本征态)为 $\begin{pmatrix} p_{\mathrm{H}} \\ -q_{\mathrm{H}} \end{pmatrix}$,相应的方程为

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{\mathrm{H}} \\ -q_{\mathrm{H}} \end{pmatrix}=\mu_{\mathrm{H}}\begin{pmatrix} p_{\mathrm{H}} \\ -q_{\mathrm{H}} \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

由上式得

$$(H_{11}-\mu_{\mathrm{H}})p_{\mathrm{H}}-H_{12}q_{\mathrm{H}}=0,$$

结合(4.56),(4.57)式,可得

$$\frac{q_{\mathrm{H}}}{p_{\mathrm{H}}}=\frac{H_{11}-\mu_{\mathrm{H}}}{H_{12}}=-\frac{\Delta\mu(1+\theta)}{2H_{12}}=-\frac{2H_{21}}{\Delta\mu(1-\theta)}. \tag{4.59}$$

同样可得

$$\frac{q_{\mathrm{L}}}{p_{\mathrm{L}}}=-\frac{\Delta\mu(1-\theta)}{2H_{12}}=-\frac{2H_{21}}{\Delta\mu(1+\theta)}. \tag{4.60}$$

容易导出,(4.52)式中的 CP 或 T 破坏参数 δ 又可表示为

$$\delta=\frac{|p_{\mathrm{L}}/q_{\mathrm{L}}|-|q_{\mathrm{H}}/p_{\mathrm{H}}|}{|p_{\mathrm{L}}/q_{\mathrm{L}}|+|q_{\mathrm{H}}/p_{\mathrm{H}}|}, \tag{4.61}$$

而 CPT 破坏参数,(4.53)式中的 θ 又可表示为

$$\theta=\frac{q_{\mathrm{H}}/p_{\mathrm{H}}-q_{\mathrm{L}}/p_{\mathrm{L}}}{q_{\mathrm{H}}/p_{\mathrm{H}}+q_{\mathrm{L}}/p_{\mathrm{L}}}=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \tag{4.62}$$

其中

$$\zeta=\frac{q_{\mathrm{H}}/p_{\mathrm{H}}}{q_{\mathrm{L}}/p_{\mathrm{L}}}. \tag{4.63}$$

可以证明,当味本征态 $|\mathrm{P}^0\rangle$,$|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle$ 和质量本征态 $|\mathrm{P}_{\mathrm{H}}\rangle$,$|\mathrm{P}_{\mathrm{L}}\rangle$ 做位相变换,即

$$\begin{aligned} |\mathrm{P}^0\rangle &\longrightarrow e^{i\gamma}|\mathrm{P}^0\rangle, \\ |\overline{\mathrm{P}}^0\rangle &\longrightarrow e^{i\bar\gamma}|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle, \\ |\mathrm{P}_{\mathrm{H}}\rangle &\longrightarrow e^{i\gamma_{\mathrm{H}}}|\mathrm{P}_{\mathrm{H}}\rangle, \\ |\mathrm{P}_{\mathrm{L}}\rangle &\longrightarrow e^{i\gamma_{\mathrm{L}}}|\mathrm{P}_{\mathrm{L}}\rangle \end{aligned} \tag{4.64}$$

时，相应的系数变化为

$$\begin{aligned} q_{\mathrm{H}} &\longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{H}}-\bar{\gamma})} q_{\mathrm{H}}, \\ p_{\mathrm{H}} &\longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{H}}-\gamma)} p_{\mathrm{H}}, \\ q_{\mathrm{L}} &\longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{L}}-\bar{\gamma})} q_{\mathrm{L}}, \\ p_{\mathrm{L}} &\longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{L}}-\gamma)} p_{\mathrm{L}}, \end{aligned} \tag{4.65}$$

而(4.61)～(4.63)式的 δ,θ,ζ 均是位相变换不变量，因而是物理可观测量.

质量本征态 $|\mathrm{P_H}\rangle,|\mathrm{P_L}\rangle$ 随时间的变化为

$$\begin{aligned} |\mathrm{P_H}(t)\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_{\mathrm{H}}t}|\mathrm{P_H}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_{\mathrm{H}}t}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma_{\mathrm{H}}t}{2}}|\mathrm{P_H}\rangle, \\ |\mathrm{P_L}(t)\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_{\mathrm{L}}t}|\mathrm{P_L}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_{\mathrm{L}}t}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma_{\mathrm{L}}t}{2}}|\mathrm{P_L}\rangle, \end{aligned} \tag{4.66}$$

其中时间 t 是指在粒子静止系中的时间.

§4.4　*CPT* 不变时的情形

目前已知的定域场论都满足 *CPT* 不变性. 详细情形可参阅 §2.4.

由于 *CPT* 不变性是普遍成立的，且到目前为止实验上没有任何 *CPT* 破坏的迹象，故本书以后的章节的讨论都以 *CPT* 不变性为前提.

由表 4.1 可知，*CPT* 不变性保证了 $\Gamma_{11}=\Gamma_{12}$，$M_{11}=M_{22}$，因此有效哈密顿量(4.6)式满足

$$H_{11}=H_{22}. \tag{4.67}$$

因此，由(4.53)式可见

$$\theta=0. \tag{4.68}$$

再考虑(4.59)，(4.60)式，得

$$q_{\mathrm{H}}/p_{\mathrm{H}}=q_{\mathrm{L}}/p_{\mathrm{L}}. \tag{4.69}$$

由归一化条件

$$|p_{\mathrm{H}}|^2+|q_{\mathrm{H}}|^2=|p_{\mathrm{L}}|^2+|q_{\mathrm{L}}|^2=1$$

及(4.69)式可有

$$\left|\frac{q_{\mathrm{H}}}{p_{\mathrm{H}}}\right|^2+1=\frac{1}{|p_{\mathrm{H}}|^2}=\left|\frac{q_{\mathrm{L}}}{p_{\mathrm{L}}}\right|^2+1=\frac{1}{|p_{\mathrm{L}}|^2}, \tag{4.70}$$

由此得出

$$|p_{\mathrm{H}}|=|p_{\mathrm{L}}|. \tag{4.71}$$

从(4.64)式可知，$|P_H\rangle$，$|P_L\rangle$ 的相对位相是任意的，因此我们可以选择其相对位相，使得 p_H，p_L 的位相相同．由(4.71)，(4.69)式得到

$$p_H=p_L,q_H=q_L. \tag{4.72}$$

这样，$|P_H\rangle$，$|P_L\rangle$ 的表达式大为简化，

$$\begin{aligned}|P_H\rangle&=p|P^0\rangle-q|\overline{P}^0\rangle,\\|P_L\rangle&=p|P^0\rangle+q|\overline{P}^0\rangle.\end{aligned} \tag{4.73}$$

应当指出，如果 CPT 破坏，则(4.69)式不成立，即使选了系数 p_H 与 p_L 位相相同也不能保证 q_H 与 q_L 同位相．因此任何 p_H/p_L 位相或 q_H/p_L 位相的特定选取都失去了优越性．

(4.56)式的本征值可表为

$$\begin{aligned}\mu_H&=m_H-\frac{i}{2}\Gamma_H,\\\mu_L&=m_L-\frac{i}{2}\Gamma_L,\end{aligned} \tag{4.74}$$

因而有

$$\begin{aligned}\Delta\mu&=\mu_H-\mu_L=\Delta m-\frac{i}{2}\Delta\Gamma,\\\Delta m&=m_H-m_L,\\\Delta\Gamma&=\Gamma_H-\Gamma_L.\end{aligned} \tag{4.75}$$

由(4.59)或(4.60)式可知，CPT 不变使得 $\theta=0$ 及 $H_{11}=H_{22}$，则

$$\begin{aligned}\frac{q}{p}&=-\frac{\Delta\mu}{2H_{12}}=-\frac{2\sqrt{H_{12}H_{21}}}{2H_{12}}=\pm\sqrt{\frac{H_{21}}{H_{12}}}\\&=\pm\sqrt{\frac{2M_{12}^*-i\Gamma_{12}^*}{2M_{12}-i\Gamma_{12}}}.\end{aligned} \tag{4.76}$$

上式取“+”或“−”，取决于实验上所得的 $\Delta m>0$ 或 <0. 如果我们取定 $\Delta m>0$，即 $m_H>m_L$，则应当看实验上测得的 $|P_H\rangle$ 态是以 CP 为正的态为主还是以 CP 为负的态为主. 例如 K^0-$\overline{K}^0$ 系统，实验测得长寿命的 $|K_L\rangle$ 主要衰变为 3π，且以 $CP=-1$ 为主要态，短寿命 $|K_S\rangle$ 主要衰变到 2π，且以 $CP=+1$ 为主，并且 $m_{K_L}>m_{K_S}$.

这样一来，如果假定 CPT，CP 同时守恒，由表 4.1 及 $M_{ij}^*=M_{ji}$，我们有

$$\begin{aligned}M_{12}^*&=e^{2i\xi}M_{12},\\\Gamma_{12}^*&=e^{2i\xi}\Gamma_{12},\end{aligned} \tag{4.77}$$

再由(4.76)式，可得

$$\frac{q}{p}=\pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}. \tag{4.78}$$

由(4.73),(4.19)式,得

$$CP|\mathrm{P_H}\rangle = p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle - q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}|\mathrm{P}^0\rangle,$$

由(4.78)式,有

$$p=\pm q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi},\quad q=\pm p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi},$$

代入上式,得

$$\begin{aligned} CP|\mathrm{P_H}\rangle &= \pm q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle \mp p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}|\mathrm{P}^0\rangle \\ &= \mp(p|\mathrm{P}^0\rangle - q|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle) = \mp|\mathrm{P_H}\rangle, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} CP|P_H\rangle &= \mp|\mathrm{P_H}\rangle, \\ CP|\mathrm{P_L}\rangle &= \pm|P_L\rangle. \end{aligned}$$

对 K^0-$\overline{\mathrm{K}}^0$ 系统,$\mathrm{K_L}$($\sim\mathrm{P_H}$)主要是 $CP=-1$ 的态,即

$$CP|\mathrm{K_L}\rangle = -|K_L\rangle \quad (CP\text{ 守恒时}),$$

这相当于取

$$CP|\mathrm{P_H}\rangle = -|\mathrm{P_H}\rangle,$$

这要求

$$\frac{q}{p}=\sqrt{\frac{M_{12}^*-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}. \tag{4.79}$$

§4.5 CP 破 坏

4.5.1 态矢量随时间的发展

由(4.73)式,$|\mathrm{P}^0\rangle$,$|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle$可由质量本征态(物理态)$|\mathrm{P_H}\rangle$,$|\mathrm{P_L}\rangle$表示,即

$$\begin{aligned} |\mathrm{P}^0\rangle &= \frac{1}{2p}(|\mathrm{P_L}\rangle + |\mathrm{P_H}\rangle), \\ |\overline{\mathrm{P}}^0\rangle &= \frac{1}{2q}(|\mathrm{P_L}\rangle - |\mathrm{P_H}\rangle). \end{aligned} \tag{4.80}$$

$|\mathrm{P_H}\rangle$,$|\mathrm{P_L}\rangle$的时间演化可由哈密顿量的本征值给出,即

$$|P_H(t)\rangle = e^{-i\mu_H t}|P_H\rangle = e^{-i(m_H - \frac{i}{2}\Gamma_H)t}|P_H\rangle,$$
$$|P_L(t)\rangle = e^{-i\mu_L t}|P_L\rangle = e^{-i(m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L)t}|P_L\rangle, \tag{4.81}$$

而

$$|P^0(t)\rangle = \frac{1}{2p}(|P_L(t)\rangle + |P_H(t)\rangle)$$
$$= \frac{1}{2p}[e^{-i(m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L)t}|P_L\rangle + e^{-i(m_H - \frac{i}{2}\Gamma_H)t}|P_H\rangle]. \tag{4.82}$$

将(4.73)式代入(4.82)式，并使用同样方法于$|\overline{P}^0(t)\rangle$，则有

$$|P^0(t)\rangle = g_+(t)|P^0\rangle + \frac{q}{p}g_-(t)|\overline{P}^0\rangle,$$
$$|\overline{P}^0(t)\rangle = \frac{p}{q}g_-(t)|P^0\rangle + g_+(t)|\overline{P}^0\rangle, \tag{4.83}$$

其中

$$g_\pm(t) = \frac{1}{2}[e^{-i(m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L)t} \pm e^{-i(m_H - \frac{i}{2}\Gamma_H)t}]. \tag{4.84}$$

令

$$m_H - m_L = \Delta m, \qquad x = \frac{\Delta m}{\Gamma},$$
$$m_H + m_L = 2m, \qquad y = \frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma},$$
$$\Gamma_H - \Gamma_L = \Delta\Gamma,$$
$$\Gamma_H + \Gamma_L = 2\Gamma, \tag{4.85}$$

有

$$g_\pm(t) = \frac{1}{2}e^{-imt}e^{-\Gamma t/2}(e^{it\Delta m/2}e^{t\Delta\Gamma/4} \pm e^{-it\Delta m/2}e^{-t\Delta\Gamma/4}). \tag{4.86}$$

注意(4.86)式与 $\Delta m, \Delta\Gamma$ 的定义有关系．

在时刻 t，$|P^0(t)\rangle$，$|\overline{P}^0(t)\rangle$衰变到任一末态 f 或 $\bar{f}$ 的振幅为：

$$A(P^0(t)\to f) = \langle f|H_w|P^0(t)\rangle$$
$$= g_+(t)A(f) + \frac{q}{p}g_-(t)\overline{A}(f)$$
$$= A(f)[g_+(t) + \lambda_f g_-(t)],$$

$$
\begin{aligned}
A(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to \mathrm{f}) &= \frac{p}{q}g_-(t)A(\mathrm{f})+g_+(t)\overline{A}(\mathrm{f}) \\
&= \frac{p}{q}A(\mathrm{f})[g_-(t)+\lambda_\mathrm{f} g_+(t)], \\
A(\mathrm{P}^0(t)\to \bar{\mathrm{f}}) &= g_+(t)A(\bar{\mathrm{f}})+\frac{q}{p}g_-(t)\overline{A}(\bar{\mathrm{f}}) \\
&= \frac{q}{p}\overline{A}(\bar{\mathrm{f}})[g_-(t)+\bar{\lambda}_{\bar{\mathrm{f}}} g_+(t)], \\
A(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to \bar{\mathrm{f}}) &= \frac{p}{q}g_-(t)A(\bar{\mathrm{f}})+g_+(t)\overline{A}(\bar{\mathrm{f}}) \\
&= \overline{A}(\bar{\mathrm{f}})[g_+(t)+\bar{\lambda}_{\bar{\mathrm{f}}} g_-(t)],
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

其中我们用了(4.83)式，并且定义

$$
\begin{aligned}
&A(\mathrm{f})=\langle \mathrm{f}|H_\mathrm{w}|\mathrm{P}^0\rangle,\quad \overline{A}(\mathrm{f})=\langle \mathrm{f}|H_\mathrm{w}|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle, \\
&A(\bar{\mathrm{f}})=\langle \bar{\mathrm{f}}|H_\mathrm{w}|\mathrm{P}^0\rangle,\quad \overline{A}(\bar{\mathrm{f}})=\langle \bar{\mathrm{f}}|H_\mathrm{w}|\overline{\mathrm{P}}^0\rangle, \\
&\lambda_\mathrm{f}=\frac{q}{p}\frac{\overline{A}(\mathrm{f})}{A(\mathrm{f})},\quad \bar{\lambda}_{\bar{\mathrm{f}}}=\frac{p}{q}\frac{A(\bar{\mathrm{f}})}{\overline{A}(\bar{\mathrm{f}})}.
\end{aligned}
\tag{4.88}
$$

相应的衰变宽度实际上正比于(4.87)式振幅的绝对值平方，即有

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to \mathrm{f}) &= |A(\mathrm{f})|^2\{|g_+(t)|^2+|\lambda_\mathrm{f}|^2|g_-(t)|^2+2\mathrm{Re}[\lambda_\mathrm{f} g_+^*(t)g_-(t)]\}, \\
\Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to \mathrm{f}) &\doteq \left|\frac{p}{q}\right|^2|A(\mathrm{f})|^2\{|g_-(t)|^2+|\lambda_\mathrm{f}|^2|g_+(t)|^2+2\mathrm{Re}[\lambda_\mathrm{f} g_+(t)g_-^*(t)]\}, \\
\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to \bar{\mathrm{f}}) &= \left|\frac{q}{p}\right|^2|\overline{A}(\bar{\mathrm{f}})|^2\{|g_-(t)|^2+|\bar{\lambda}_{\bar{\mathrm{f}}}|^2|g_+(t)|^2+2\mathrm{Re}[\bar{\lambda}_{\bar{\mathrm{f}}} g_+(t)g_-^*(t)]\}, \\
\Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to \bar{\mathrm{f}}) &= |\overline{A}(\bar{\mathrm{f}})|^2\{|g_+(t)|^2+|\bar{\lambda}_{\bar{\mathrm{f}}}|^2|g_-(t)|^2+2\mathrm{Re}[\bar{\lambda}_{\bar{\mathrm{f}}} g_+^*(t)g_-(t)]\}.
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

由(4.86)式可推出

$$
\begin{aligned}
|g_+(t)|^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}\left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)+\cos(\Delta m t)\right], \\
|g_-(t)|^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}\left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)-\cos(\Delta m t)\right], \\
g_+^*(t)g_-(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}\left[\sinh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)+\mathrm{i}\sin(\Delta m t)\right].
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

将(4.90)式代入(4.89)式，得

$$
\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to \mathrm{f}) = |A(\mathrm{f})|^2\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}(I_1+I_2),
$$

$$\Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to\mathrm{f})=|A(\mathrm{f})|^2\left|\frac{p}{q}\right|^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}(I_1-I_2),\tag{4.91}$$

其中

$$I_1=(1+|\lambda_\mathrm{f}|^2)\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+2\mathrm{Re}\left(\lambda_\mathrm{f}\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right),$$

$$I_2=(1-|\lambda_\mathrm{f}|^2)\cos\Delta mt-2\mathrm{Im}(\lambda_\mathrm{f}\sin\Delta mt),$$

以及

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to\overline{\mathrm{f}})&=|\overline{A}(\overline{\mathrm{f}})|^2\left|\frac{q}{p}\right|^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}(\overline{I}_1-\overline{I}_2),\\ \Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to\overline{\mathrm{f}})&=|\overline{A}(\overline{\mathrm{f}})|^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}(\overline{I}_1+\overline{I}_2),\end{aligned}\tag{4.92}$$

其中

$$\overline{I}_1=(1+|\overline{\lambda}_{\overline{\mathrm{f}}}|^2)\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+2\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}_{\overline{\mathrm{f}}}\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right),$$

$$\overline{I}_2=(1-|\overline{\lambda}_{\overline{\mathrm{f}}}|^2)\cos\Delta mt-2\mathrm{Im}(\overline{\lambda}_{\overline{\mathrm{f}}}\sin\Delta mt).$$

4.5.2 时间依赖和时间积分的 *CP* 破坏观测量

实验上经常测量的 CP 破坏的物理量是 CP 不对称性．对衰变末态 f，t 时刻的 CP 不对称性定义为

$$\mathscr{A}_{CP}(t)=\frac{\Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to\overline{\mathrm{f}})-\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to\mathrm{f})}{\Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to\overline{\mathrm{f}})+\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to\mathrm{f})},\tag{4.93}$$

其中 $\overline{\mathrm{f}}$ 是 f 的 CP 共轭态，即 $|\overline{\mathrm{f}}\rangle=CP|\mathrm{f}\rangle$.

有些情况下，或因为探测器无法测量衰变时间 t，或为了增加数据的统计量，实际测量的是时间积分的 CP 不对称性

$$\mathscr{A}_{CP}=\frac{\int_0^\infty\mathrm{d}t\Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to\overline{\mathrm{f}})-\int_0^\infty\mathrm{d}t\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to\mathrm{f})}{\int_0^\infty\mathrm{d}t\Gamma(\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to\overline{\mathrm{f}})+\int_0^\infty\mathrm{d}t\Gamma(\mathrm{P}^0(t)\to\mathrm{f})}.\tag{4.94}$$

时间依赖和时间积分的 CP 不对称性都是实验中常测量的物理量，以后会经常用到．

为了计算时间积分的 CP 不对称性，我们常用到的积分有

$$\begin{aligned}G_+&=\int_0^\infty\mathrm{d}t|g_+(t)|^2=\frac{2+x^2-y^2}{2\Gamma(1+x^2)(1-y^2)},\\ G_-&=\int_0^\infty\mathrm{d}t|g_-(t)|^2=\frac{x^2+y^2}{2\Gamma(1+x^2)(1-y^2)}\end{aligned}\tag{4.95}$$

和

$$G_{+-}=\int_0^\infty \mathrm{d}t g_+^*(t)g_-(t)=\frac{y(1+x^2)+\mathrm{i}x(1-y^2)}{2\Gamma(1+x^2)(1-y^2)}, \tag{4.96}$$

其中 x,y,Γ 的定义见(4.85)式.

本小节的公式在以后讨论 B 介子,D 介子衰变时经常会用到.

4.5.3　CP 破坏的分类

一般而言,CP 破坏可分为三类:

(1) 直接 CP 破坏(direct CP violation,又称 CP violation in decay amplitudes).

如果

$$|A(\mathrm{B}\to\mathrm{f})|\neq|\overline{A}(\overline{\mathrm{B}}\to\overline{\mathrm{f}})|, \tag{4.97}$$

即过程 $\mathrm{B}\to\mathrm{f}$ 的衰变振幅绝对值不等于过程 $\overline{\mathrm{B}}\to\overline{\mathrm{f}}$ 的衰变振幅的绝对值,则称为直接 CP 破坏,其中 $\overline{\mathrm{B}},\overline{\mathrm{f}}$ 是 B,f 的 CP 共轭态.

带电介子 $\mathrm{B}^\pm$ 的部分衰变率的不对称性(partial-decay-rate asymmetry)属于这一类. 中性 K 介子弱衰变中 $\mathrm{Re}(\epsilon'/\epsilon)\neq0$ 也属于这一类.

(2) 间接 CP 破坏(indirect CP violation,又称 CP violation in mixing).

这一类是由中性粒子的混合诱导的 CP 不守恒. 其条件是

$$\left|\frac{q}{p}\right|\neq1, \tag{4.98}$$

q,p 的定义见(4.73)式.

例如,e^+-e^- 对撞机上产生的 P^0 和 $\overline{\mathrm{P}}^0$,由于有混合,会随着时间的发展都分别变为 P^0 和 $\overline{\mathrm{P}}^0$ 的叠加. 但我们知道,P^0 只能衰变为 l^+ (l 可为 e,μ,τ),$\overline{\mathrm{P}}^0$ 只能衰变为 l^-. [如 $\mathrm{B}^0=(\overline{\mathrm{b}}\mathrm{d})$,$\mathrm{B}^0\to\mathrm{l}^+\mathrm{X}$,$\overline{\mathrm{B}}^0\to\mathrm{l}^-\mathrm{X}$]所以若 $\mathrm{P}^0(t)\overline{\mathrm{P}}^0(t)\to\mathrm{l}^+\mathrm{l}^+$ 或 $\mathrm{l}^-\mathrm{l}^-$,则一定是 $\mathrm{P}^0\to\mathrm{l}^+$,$\overline{\mathrm{P}}^0\xrightarrow{\text{混合}}\mathrm{P}^0\to\mathrm{l}^+$. 因此,同号轻子末态的轻子数不对称

$$a=\frac{N^{--}-N^{++}}{N^{--}+N^{++}}=\frac{|q/p|^2-|p/q|^2}{|q/p|^2+|p/q|^2} \tag{4.99}$$

正是由混合诱导的 CP 破坏. 这在实验上是可以测量的.

(3) 混合型 CP 破坏(mixed CP violation,又称 CP violation in the interference of mixing and decay).

定义

$$\lambda=\frac{q}{p}\frac{A(\overline{\mathrm{B}}\to\mathrm{f})}{A(\mathrm{B}\to\mathrm{f})}, \tag{4.100}$$

则

$$\lambda \neq 1 \tag{4.101}$$

是混合型 *CP* 破坏的条件．注意

$$|\lambda| = 1, \mathrm{Im}\lambda \neq 0 \tag{4.102}$$

是(4.101)式的特例，而且物理上非常重要．$B^0 \to \psi K_s$ 衰变中的 *CP* 破坏就属于这一类．这一衰变称为测量 B 介子衰变中 *CP* 不守恒的“黄金道”．日本和美国的两个 B 工厂 KEK-B 和 PEP-Ⅱ都已精确测量了 $B^0 \to \psi K_S$ 中的 *CP* 不对称性．以后我们还会讨论这一问题．

参 考 文 献

[1] Lee T D, Yang C N. Phys. Rev., 1955, 98: 1501.
[2] Lee T D, Oehme R, Yang C N. Phys. Rev., 1957, 106: 340.
[3] Weisskopf V F, Wigner E P. Z. Phys. 1930, 63: 54; Z. Phys. 1930, 65: 18.
[4] Kabir P K. The CP Puzzle. Academic Press, 1968.
[5] Branco G C, Lavoura L, Silva J P. CP Violation. Clarendon Press, 1999.

第五章　中性 K 介子系统的 *CP* 破坏

§5.1　τ-ϑ 疑难

1947 年 Rochester 和 Butler 用云雾室研究宇宙线时发现了两个事例[1]，经分析认为是质量(435±100)MeV 的中性粒子衰变为两个带电的质量约为 100MeV 的粒子，即 $K_1^0 \to \pi^+\pi^-$，这导致了奇异粒子 K_1^0 的发现．此后他们又找到了带电 K 介子到两个 π 介子的衰变 $K^+ \to \pi^+\pi^0$．随着研究的深入，实验上又发现了两类事例：

$$\vartheta^+ \to \pi^+\pi^0,$$
$$\tau^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-.$$

测量结果表明，上面的 2π 和 3π 末态的总角动量都为零，因此，$J^P(\pi^+\pi^0) = 0^+$，$J^P(\pi^+\pi^+\pi^-) = 0^-$．此外，还发现 ϑ^+，τ^+ 的质量和寿命都相同．在当时(20 世纪 50 年代)物理界普遍认为宇称是守恒的，这样就产生了困惑：为什么两个质量和寿命都相同的粒子 ϑ^+ 和 τ^+ 宇称却不相同？要知道末态 2π 和 3π 的相空间是如此的不同，但 ϑ^+，τ^+ 的寿命都相同．这就是著名的 τ-ϑ 疑难．后来知道弱相互作用过程宇称可以不守恒，便很容易弄清，τ^+，ϑ^- 实际上是同一个粒子 K^+．

§5.2　K^0-$\overline{K}^0$ 混合(振荡)

随着实验的开展，在宇宙线和加速器上发现了一系列新的奇异粒子，如 Λ^0，Ξ^- 等．为了解释奇异粒子的产生和衰变，Gell-Mann[2] 和 Nakano，Nishijima 等提出了奇异量子数并作为相加量子数赋予奇异粒子[3]．奇异数对 K^-，Λ，$\overline{K}^0$ 为 −1，对 K^+，$\overline{\Lambda}$，K^0 为 +1，对 Ξ^- 为 −2，对其他所有非奇异粒子为零．而且他们假定强相互作用下奇异数守恒，弱相互作用中奇异数可以不守恒．例如，加速器上奇异粒子的强产生

$$\begin{array}{lcccccc} & \pi^- & p & \longrightarrow & \Lambda & K^0 & \\ \text{奇异数 } S & 0 & 0 & & -1 & 1 & \\ & \pi^+ & p & \longrightarrow & K^+ & K^- & p \\ \text{奇异数 } S & 0 & 0 & & 1 & -1 & 0 \end{array} \tag{5.1}$$

过程始末态奇异数相加都为零．

按夸克模型,$K^0=(\bar{s}d)$,$K^+=(\bar{s}u)$,$\Lambda=(uds)$. 只要赋予奇异夸克 s 的奇异数为−1,就可以圆满解释强作用过程奇异数守恒的现象.

在上面强产生过程中末态的 K^0,$\overline{K}^0$ 都可以衰变为 2π 和 3π 末态. 这就是说,K^0,$\overline{K}^0$ 有共同的衰变末态 2π,3π,因而又以通过 2π,3π 等中间态互相转化,如图 5.1 所示.

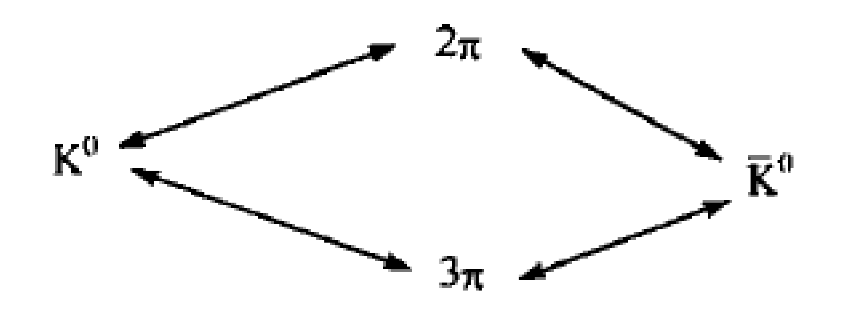


图 5.1 K^0 和 $\overline{K}^0$ 相互转化

K^0 和 $\overline{K}^0$ 可以互相变来变去被称作 K^0-$\overline{K}^0$ 混合(振荡). 这是中性 K 介子系统具有的奇妙性质. 其他中性粒子如 D^0-$\overline{D}^0$,B_d^0-$\overline{B}_d^0$,B_s^0-$\overline{B}_s^0$ 等介子系统都有类似特性. 这点以后讨论.

对 K^0-$\overline{K}^0$ 系统,利用(4.19)式并取 $\xi=0$(因位相 ξ 任意,因而也可取为零)得

$$CP|K^0\rangle=|\overline{K}^0\rangle,\quad CP|\overline{K}^0\rangle=|K^0\rangle. \tag{5.2}$$

定义

$$\begin{aligned}|K_1^0\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle+|\overline{K}^0\rangle),\\|K_2^0\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle-|\overline{K}^0\rangle),\end{aligned} \tag{5.3}$$

由(5.2)式可知 $|K_1^0\rangle$ 的 CP 宇称为正,$|K_2^0\rangle$ 的 CP 宇称为负.

对 $\pi^+\pi^-$,$\pi^0\pi^0$ 态,不论相对角动量是多少,总有

$$CP|\pi^+\pi^-\rangle=|\pi^+\pi^-\rangle,CP|\pi^0\pi^0\rangle=|\pi^0\pi^0\rangle, \tag{5.4}$$

即 $\pi^+\pi^-$,$\pi^0\pi^0$ 的 CP 宇称总为正,这是因为 CP 作用于 $\pi^+\pi^-$ 时相当于两次互换位置,出现 $(-1)^{2l}(-1)^2=+1$ 的 CP 宇称因子. 而 $\pi^0\pi^0$ 全对称波函数要求相对角动量 l 为偶数,且由于

$$CP|\pi^0\rangle=-|\pi^0\rangle,$$

所以

$$CP|\pi^0\pi^0\rangle=|\pi^0\pi^0\rangle.$$

对于 3π 态情况就没这么简单了. 在 § 5.8 我们将对其做详细讨论.

假定 CP 守恒,则 K_1^0 只能衰变到 CP 为正的 2π 态,K_2^0 只能衰变到 $CP=-1$ 的 3π 态.

实验上发现，有两种寿命相差极大的中性 K 介子．一种短寿命的称为 K_S，平均寿命 $\tau_S=(0.8953\pm0.0005)\times10^{-10}$s. K_S 只能衰变为 2π 态. 另一种是长寿命中性 K 介子，称为 K_L，平均寿命 $\tau_L=(5.116\pm0.020)\times10^{-8}$s[4]，约为 K_S 的 570 倍. K_L 只能衰变为 3π 态．

实际上，1947 年 Rochester 和 Butler 发现的 K_1^0 是 K_S，长寿命的 K_L 直到 1956 年才被 Lederman 的实验组发现[5].

如果 CP 守恒(后面将看到 K^0-$\overline{K}^0$ 系统 CP 破坏极小，只有 10^{-3} 的量级)，显而易见

$$|K_S\rangle=|K_1^0\rangle,\quad |K_L\rangle=|K_2^0\rangle. \tag{5.5}$$

从实验上看，K^0，$\overline{K}^0$ 是强相互作用的本征态(从产生过程可看出)，而 K_S，K_L 是质量本征态(总哈密顿量的本征态).

假定 K^0 在 $t=0$ 时，由强相互作用过程 $\pi^- p\to\Lambda K^0$ 产生出来[见(5.1)式]，K^0 随时间如何变化呢?

态矢量随时间的变化应按(4.81)式由总哈密顿量的本征态来描写，即

$$\begin{aligned}|K_S(t)\rangle&=e^{-i(m_S-\frac{i}{2}\Gamma_S)t}|K_S\rangle,\\ |K_L(t)\rangle&=e^{-i(m_L-\frac{i}{2}\Gamma_L)t}|K_L\rangle.\end{aligned} \tag{5.6}$$

由(5.3)，(5.6)式，得

$$\begin{aligned}|K^0(t)\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S(t)\rangle+|K_L(t)\rangle)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i(m_S-\frac{i}{2}\Gamma_S)t}|K_S\rangle+e^{-i(m_L-\frac{i}{2}\Gamma_L)t}|K_L\rangle]\\ &=g_+(t)|K^0\rangle+g_-(t)|\overline{K}^0\rangle,\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}|\overline{K}^0(t)\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S(t)\rangle-|K_L(t)\rangle)\\ &=g_-(t)|K_0\rangle+g_+(t)|\overline{K}^0\rangle,\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中

$$g_\pm(t)=\frac{1}{2}[e^{-i(m_S-\frac{i}{2}\Gamma_S)t}\pm e^{-i(m_L-\frac{i}{2}\Gamma_L)t}]. \tag{5.9}$$

$t=0$ 时刻一束强度为 I_0 的纯 K^0 束流在 t 时刻 $\overline{K}^0$ 的强度

$$\begin{aligned}I_t(K^0\to\overline{K}^0)&=I_0|\langle\overline{K}^0|K^0(t)\rangle|^2\\ &=I_0|g_-(t)|^2\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}I_0\left[e^{-\Gamma_S t}+e^{-\Gamma_L t}-2\,e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_S+\Gamma_L)t}\cos\Delta m_K t\right], \quad (5.10)$$

其中

$$\Delta m_K=m_L-m_S. \quad (5.11)$$

显然，$I_{t=0}(K^0\to\overline{K}^0)=0$，因此时只有纯 K^0 束流．同样，在 $t=0$ 时强度为 I_0 的纯 K^0 束流，在 t 时发现 K^0 的强度

$$\begin{aligned}I_t(K^0\to K^0)&=I_0\,|\langle K^0|K^0(t)\rangle|^2=I_0\,|g_+(t)|^2\\&=\frac{1}{4}I_0\left[e^{-\Gamma_S t}+e^{-\Gamma_L t}+2\,e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_S+\Gamma_L)t}\cos\Delta m_K t\right].\end{aligned} \quad (5.12)$$

可以看出，

$$I_t(K^0\to K^0)+I_t(K^0\to\overline{K}^0)=\frac{1}{2}I_0(e^{-\Gamma_S t}+e^{-\Gamma_L t}). \quad (5.13)$$

(5.10)，(5.12)，(5.13)式所给出的流强随时间的变化曲线见图 5.2.

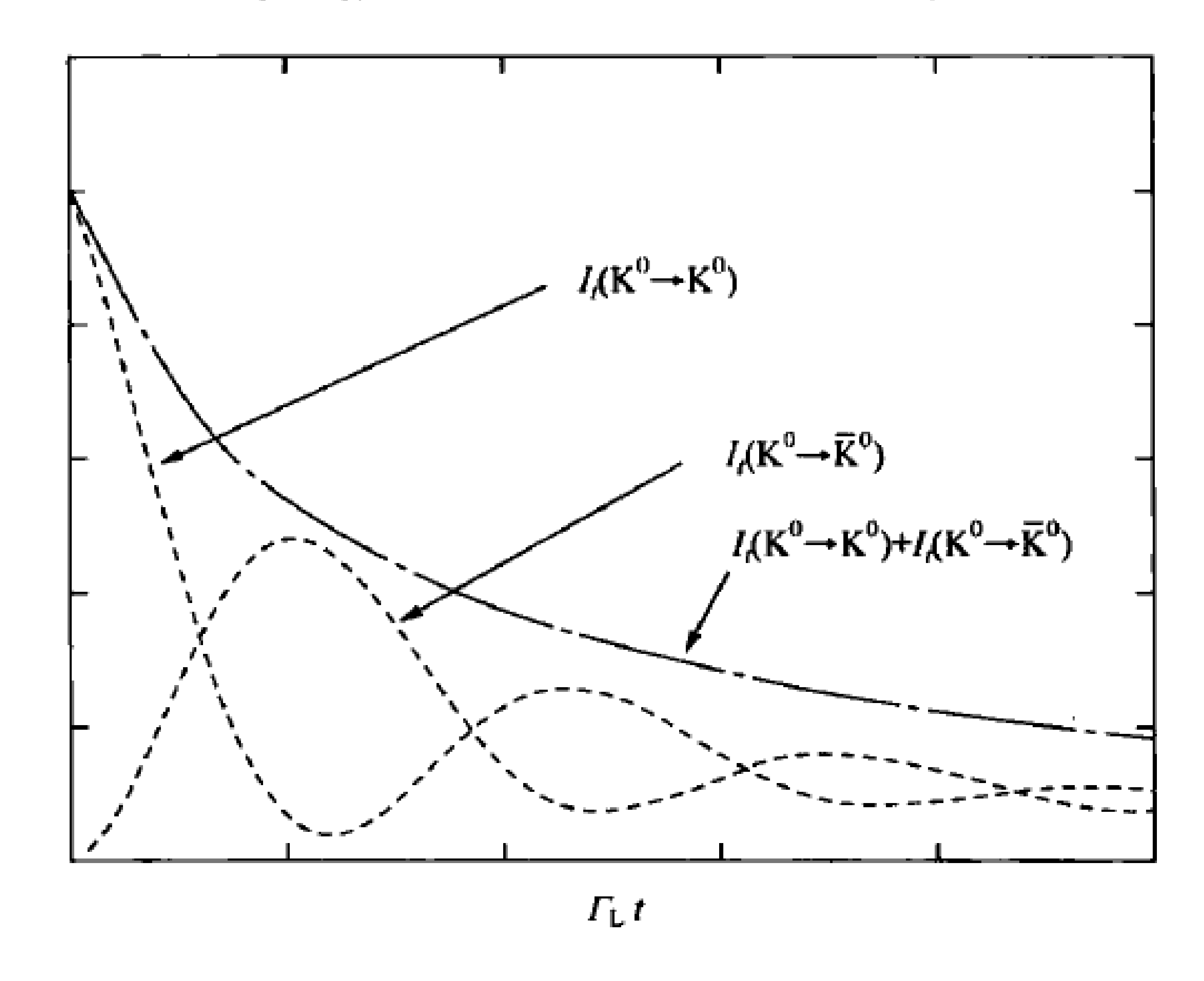


图 5.2 K^0 束中发现 K^0 的几率及 K^0 束中发现 $\overline{K}^0$ 的几率随时间的变化曲线

注意我们以上用的时间 t 都指固有时(proper time)，即 t 是自 K^0 产生后在其自身静止系中的时间，

$$t=d/\beta\gamma, \quad (5.14)$$

其中 d 为 K^0 在实验室中飞行的距离，$\beta=\frac{v}{c}$，$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

类似地，$t=0$ 时刻一束强度为 I_0 的纯 $\overline{K}^0$ 束，到 t 时刻找到 $\overline{K}^0$ 的强度

$$I_t(\overline{K}^0 \to \overline{K}^0) = I_0 |\langle \overline{K}^0 | \overline{K}^0(t) \rangle|^2 = I_0 |g_+(t)|^2 = I_t(K^0 \to K^0), \quad (5.15)$$

而找到 K^0 的强度

$$I_t(\overline{K}^0 \to K^0) = I_0 |\langle K^0 | \overline{K}^0(t) \rangle|^2 = I_0 |g_-(t)|^2 = I_t(K^0 \to \overline{K}^0). \quad (5.16)$$

只要将(5.10),(5.12),(5.13)式中 K^0 与 $\overline{K}^0$ 互换即可得到 $\overline{K}^0$ 随时间变化的情况.

以上讨论说明,初始时的纯 K^0 束,随着时间的发展会变为 K^0 与 $\overline{K}^0$ 的混合.初始时的纯 $\overline{K}^0$ 束也会随着时间的发展变为 K^0,$\overline{K}^0$ 的混合.这就是 K^0-$\overline{K}^0$ 振荡.这种振荡在 K^0-$\overline{K}^0$ 系统没有 *CP* 破坏时也会存在.

§5.3　K_S 再产生

用 π 介子束流轰击核物质靶可产生 K^0,$\overline{K}^0$ 束或等价地产生 K_S,K_L 束.由于 K_L 的寿命是 K_S 的约 570 倍,在实验室飞行一段距离后,K_S 基本上都衰变了,只剩下 K_L 束流.这就是实验上产生长寿命 K 介子束的方法.

如果让 K_L 束穿过一个核物质靶会发生什么呢? K^0 介子与核子之间的强相互作用只有弹性散射或准弹性散射,但 $\overline{K}^0$ 介子除了弹性(准弹性)散射外,还可以产生 Λ,Σ 等超子.因此,$\overline{K}^0$ 和核物质作用时开放的反应道更多,从而也更易被物质吸收.实际上,如果物质靶足够厚,$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle)$ 穿过物质后会只剩下 K^0 介子,而 $K^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_L + K_S)$.这就是说,一束纯 K_L 束穿过核物质后又出现了 K_S 束,即 K_S 再产生了.这一切的根源在于 K_S,K_L 的寿命相差几百倍且 K^0,$\overline{K}^0$ 与物质的相互作用不同.这两个条件缺一不可.K_S 再产生的图示可见图 5.3.

实验测量 K_L 质量比 K_S 稍大[4],$\Delta m_K = m_L - m_S = (3.483 \pm 0.006) \times 10^{-12}$ MeV.(假定 *CPT* 守恒)

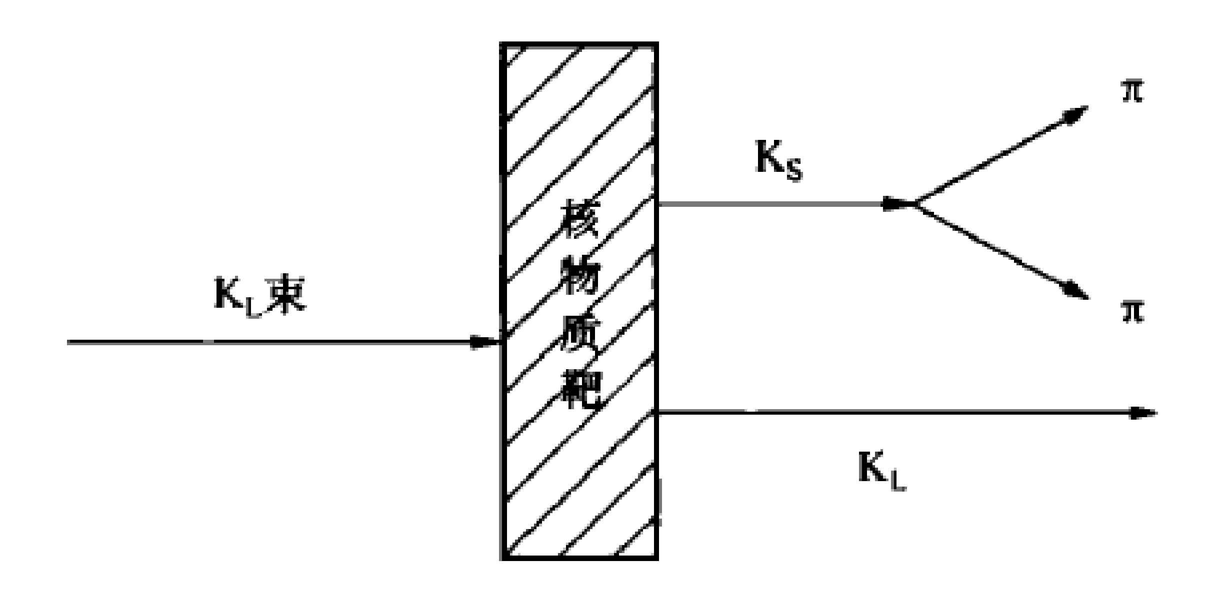


图 5.3　K_S 的再产生

§5.4 CP 破坏的发现

1964 年，Cronin，Fitch，Christenson 和 Turlay 首次在美国布鲁克海文国家实验室的交变梯度同步加速器（AGS）上发现了 $K_L \to 2\pi$ 衰变[6]. 实验用的双臂谱仪示意图见图 5.4.

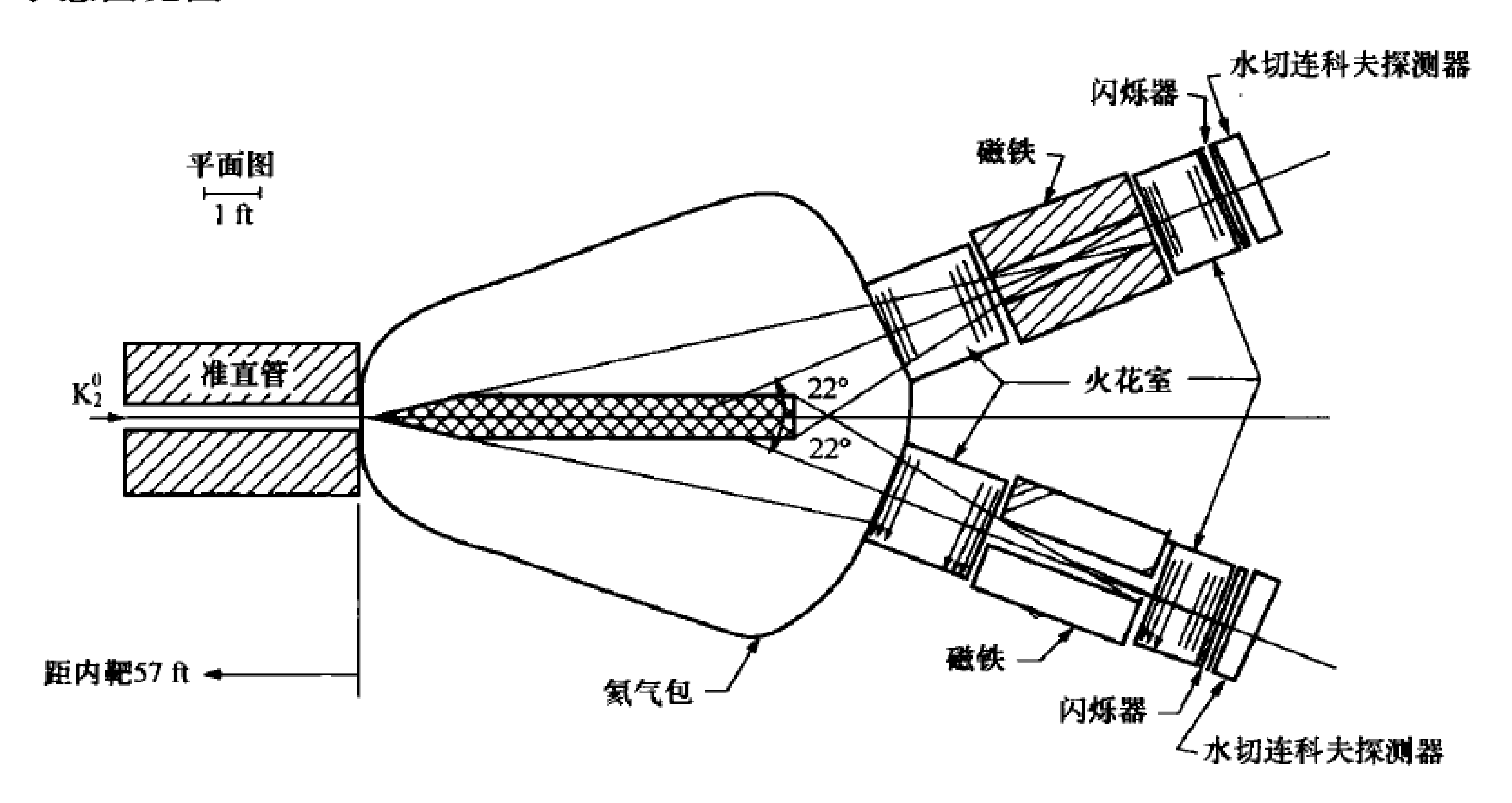


图 5.4 发现 $K_L \to 2\pi$ 的双臂谱仪示意图

实验中他们让 $K^0, \overline{K}^0$ 介子在距谱仪 57 ft（≈17.37 m）的靶上产生，在 K 介子束到达谱仪前端时 K_S 实际上早已衰变掉了，束中只剩 K_L 介子．K_L 经铅准直器进入充氦的气包．经计算，在氦气包内由 K_L 散射产生 K_S 的几率可以略去不计．这样，在末态观测 K_L 衰变中发现了每小时约有1/1000的 K_L 衰变到了 2π 态. 实验结果为

$$R = \frac{Br(K_2^0 \to \pi^+ \pi^-)}{Br(K_2^0 \to \text{所有载荷模式})} = (2.0 \pm 0.4) \times 10^{-3}. \qquad (5.17)$$

这一结果震惊了物理界，因为它表明继 P, C 不守恒之后，CP 也不守恒了．虽然还有不少人不相信 CP 对称性也被破坏，想用各种模型来解释（5.17）式的结果，但最终他们还是承认 CP 对称性在 $K_L \to 2\pi$ 中被破坏了．

这样一来，K_L 不可能严格地等同于 K_2^0，一定是混有小部分的 K_1^0，K_S 也会含有小部分的 K_2^0，即

$$|K_L\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}}(|K_2^0\rangle+\bar{\epsilon}|K_1^0\rangle),$$
$$|K_S\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}}(|K_1^0\rangle+\bar{\epsilon}|K_2^0\rangle),\tag{5.18}$$

其中

$$|\bar{\epsilon}|=2.3\times10^{-3}.\tag{5.19}$$

(5.19)式是由实验值推出的结果[6].

§5.5 半轻子衰变中的CP破坏

CP破坏自1964年在$K_L\to2\pi$中发现之后,又在半轻子衰变$K_L\to\pi l\nu(l=\mu,e)$中被发现[7].实验上测得时间积分的衰变率的不对称性为

$$\mathscr{A}_l\equiv\frac{\Gamma(K_L\to l^+\nu_l\pi^-)-\Gamma(K_L\to l^-\bar{\nu}_l\pi^+)}{\Gamma(K_L\to l^+\nu_l\pi^-)+\Gamma(K_L\to l^-\bar{\nu}_l\pi^+)}=(0.332\pm0.006)\%.\tag{5.20}$$

以上数据取自粒子表的值[4],此值实际上是$K_L\to\mu^+\nu_\mu\pi^-$和$K_L\to e^+\nu_e\pi^-$两过程的平均值.

§5.6 K→2π衰变中的CP破坏的唯象描述

实验上可以定义

$$\eta_{+-}\equiv\frac{\langle\pi^+\pi^-|H_w|K_L\rangle}{\langle\pi^+\pi^-|H_w|K_S\rangle},\quad \eta_{00}\equiv\frac{\langle\pi^0\pi^0|H_w|K_L\rangle}{\langle\pi^0\pi^0|H_w|K_S\rangle}.\tag{5.21}$$

测量K_L,K_S到$\pi\pi$的衰变率就可定出η_{+-},η_{00}的绝对值.目前最新的数据为[4]:

$$|\eta_{00}|=(2.222\pm0.012)\times10^{-3},|\eta_{+-}|=(2.233\pm0.012)\times10^{-3}.\tag{5.22}$$

由于π介子为玻色子,所以2π态若处于s波则全对称性要求总同位旋只能是0或2.中性K介子到2π衰变的振幅可用2π同位旋态来表示:

$$\langle(2\pi)_I|H_w|K^0\rangle=A_Ie^{i\delta_I},\tag{5.23}$$

$$\langle(2\pi)_I|H_w|\overline{K^0}\rangle=\overline{A}_Ie^{i\delta_I},\tag{5.24}$$

其中I为s波2π态总同位旋,δ_I是s波$(2\pi)_I$态在能量m_K的强相互作用位相(相移),A_I,$\overline{A}_I$可包含弱相互作用产生的位相,(5.24)式是(5.23)式的CP共轭态反应过程.CPT不变性要求

$$\overline{A}_I=A_I^*.\tag{5.25}$$

如果再加上 CP 守恒条件，则 A_I 为实数.

为了看清上述特性，我们明显标出出态|out⟩和入态|in⟩，并注意到 CPT，T 变换的反幺正特性，则按(4.16)式，有

$$\langle(2\pi)_I;\text{out}|H_w|K^0\rangle=\langle((2\pi)_I;\text{out})_{CPT}|(H_w)_{CPT}|(K^0)_{CPT}\rangle^*. \quad (5.26)$$

而

$$\langle(2\pi)_I;\text{out}|_{CPT}=(CPT|(2\pi)_I;\text{out}\rangle)^\dagger=|(2\pi)_I;\text{in}\rangle^\dagger$$
$$=\langle(2\pi)_I;\text{in}|, \quad (5.27)$$

$$(H_w)_{CPT}=(CPT)H_w(CPT)^{-1}\xlongequal{CPT\text{不变}}H_w, \quad (5.28)$$

$$|(K^0)_{CPT}\rangle=CPT|K^0\rangle=|\overline{K}^0\rangle, \quad (5.29)$$

所以

$$\begin{aligned}A_I e^{i\delta_I}&\equiv\langle(2\pi)_I;\text{out}|H_w|K^0\rangle=\langle(2\pi)_I;\text{in}|H_w|\overline{K}^0\rangle^*\\&=\Big[\sum_n\langle(2\pi)_I;\text{in}|n;\text{out}\rangle\langle n;\text{out}|H_w|\overline{K}^0\rangle\Big]^*\\&=\langle(2\pi)_I;\text{in}|(2\pi)_I;\text{out}\rangle^*\langle(2\pi)_I;\text{out}|H_w|\overline{K}^0\rangle^*\\&=\overline{A}_I^* e^{i\delta_I}.\end{aligned} \quad (5.30)$$

上式用了在低能下

$$\langle(2\pi)_I;\text{out}|(2\pi)_I;\text{in}\rangle=S[(2\pi)_I]=e^{2i\delta_I}, \quad (5.31)$$

而且已取定了$|K^0\rangle$在 CPT 变换下的位相(5.29)式.

如果 H_w 满足 CP 不变性(即 CP 守恒)，则有

$$\begin{aligned}A_I e^{i\delta_I}&=\langle(2\pi)_I;\text{out}|H_w|K^0\rangle\\&=\langle(2\pi)_I;\text{out}|(CP)^\dagger(CP)H_w(CP)^\dagger(CP)|K^0\rangle\\&=\langle(2\pi)_I;\text{out}|H_w|\overline{K}^0\rangle\\&=\overline{A}_I e^{i\delta_I},\end{aligned} \quad (5.32)$$

其中用了位相约定及 2π 态 CP 宇称为正的条件：

$$CP|K^0\rangle=|\overline{K}^0\rangle,\quad CP|(2\pi)_I;\text{out}\rangle=|(2\pi)_I;\text{out}\rangle. \quad (5.33)$$

对于时间反演不变性，因 T 变换反幺正，必须用(4.16)式，有

$$\begin{aligned}A_I e^{i\delta_I}&=\langle(2\pi)_I;\text{out}|H_w|K^0\rangle=\langle(2\pi)_I;\text{out}|_T(H_w)_T T|K^0\rangle^*\\&=\Big(\sum_n\langle(2\pi)_I;\text{in}|n;\text{out}\rangle\langle n;\text{out}|H_w|K^0\rangle\Big)^*\\&=(\langle(2\pi)_I;\text{in}|(2\pi)_I;\text{out}\rangle\langle(2\pi)_I;\text{out}|H_w|K^0\rangle)^*\\&=A_I^* e^{i\delta_I},\end{aligned} \quad (5.34)$$

所以

$$A_I = A_I^* . \tag{5.35}$$

由以上的推导可以得出，

$$CPT\ \text{不变性} \rightarrow [CPT, H_w] = 0 \rightarrow A_I = \overline{A}_I^* , \tag{5.36}$$

$$CP\ \text{不变性} \rightarrow [CP, H_w] = 0 \rightarrow A_I = \overline{A}_I , \tag{5.37}$$

$$T\ \text{不变性} \rightarrow [T, H_w] = 0 \rightarrow A_I = A_I^* . \tag{5.38}$$

由于中性 K 介子 K^0，$\overline{K}^0$ 衰变的 2π 态只能有 $\pi^+\pi^-$，$\pi^0\pi^0$，所以 2π 末态总同位旋只有($I=0, I_3=0$)和($I=2, I_3=0$)的态．用$(2\pi)_{I,I_3}$来标记 2π 末态，按同位旋分析可得

$$|(2\pi)_{0,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\pi^+\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\pi^0\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\pi^-\pi^+\rangle , \tag{5.39}$$

$$|(2\pi)_{2,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\pi^+\pi^-\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\pi^0\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\pi^-\pi^+\rangle . \tag{5.40}$$

由此得

$$\begin{aligned}\sqrt{2}|(2\pi)_{0,0}\rangle + |(2\pi)_{2,0}\rangle &= \frac{3}{\sqrt{6}}(|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle) \\ &= \sqrt{3}\frac{|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{3}\frac{|\pi^+(\boldsymbol{p})\pi^-(-\boldsymbol{p}) + |\pi^-(\boldsymbol{p})\pi^+(-\boldsymbol{p})\rangle}{\sqrt{2}} ,\end{aligned} \tag{5.41}$$

最后一步我们按 $I=2,0$ 时 2π 态波函数全对称的要求把 $\pi^+\pi^-$ 波函数做了对称化，其中$\boldsymbol{p}$为 2π 质心系的动量．实际上，物理测量并不能区分$|\pi^+\pi^-\rangle$和$|\pi^-\pi^+\rangle$．以后我们写$|\pi^+\pi^-\rangle$就指已对称化的

$$\frac{|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\pi^+(\boldsymbol{p})\pi^-(-\boldsymbol{p}) + \pi^-(\boldsymbol{p})\pi^+(-\boldsymbol{p})].$$

由(5.41)得

$$\sqrt{2}|(2\pi)_{0,0}\rangle + |(2\pi)_{2,0}\rangle = \sqrt{3}|\pi^+\pi^-\rangle , \tag{5.42}$$

因此有

$$|\pi^+\pi^-\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|(2\pi)_{0,0}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|(2\pi)_{2,0}\rangle ,$$

即

$$|\pi^+\pi^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|(2\pi)_{0,0}\rangle+|(2\pi)_{2,0}\rangle). \tag{5.43}$$

由(5.39)和(5.40)式，得

$$\sqrt{2}|(2\pi)_{2,0}\rangle-|(2\pi)_{0,0}\rangle=\sqrt{3}|\pi^0\pi^0\rangle, \tag{5.44}$$

因此，

$$|\pi^0\pi^0\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}|(2\pi)_{2,0}\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}|(2\pi)_{0,0}\rangle. \tag{5.45}$$

由(5.23)，(5.24)，(5.43)，(5.45)式，有

$$\begin{aligned}
\langle\pi^+\pi^-|H_w|K^0\rangle&=\sqrt{\frac{2}{3}}A_0e^{i\delta_0}+\sqrt{\frac{1}{3}}A_2e^{i\delta_2},\\
\langle\pi^0\pi^0|H_w|K^0\rangle&=\sqrt{\frac{2}{3}}A_2e^{i\delta_2}-\sqrt{\frac{1}{3}}A_0e^{i\delta_0},\\
\langle\pi^+\pi^-|H_w|\overline{K}^0\rangle&=\sqrt{\frac{2}{3}}\overline{A}_0e^{i\delta_0}+\sqrt{\frac{1}{3}}\overline{A}_2e^{i\delta_2},\\
\langle\pi^0\pi^0|H_w|\overline{K}^0\rangle&=\sqrt{\frac{2}{3}}\overline{A}_2e^{i\delta_2}-\sqrt{\frac{1}{3}}\overline{A}_0e^{i\delta_0}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

利用(4.54)式的定义

$$\begin{aligned}
|K_S\rangle&=p|K^0\rangle+q|\overline{K}^0\rangle,\\
|K_L\rangle&=p|K^0\rangle+q|\overline{K}^0\rangle,
\end{aligned} \tag{5.47}$$

有

$$\begin{aligned}
\langle(2\pi)_I|H_w|K_S\rangle&=e^{i\delta_I}(pA_I+q\overline{A}_I),\\
\langle(2\pi)_I|H_w|K_L\rangle&=e^{i\delta_I}(pA_I-q\overline{A}_I).
\end{aligned} \tag{5.48}$$

利用(5.43)，(5.44)，(5.48)式，可推得

$$\begin{aligned}
\langle\pi^+\pi^-|H_w|K_L\rangle&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\langle(2\pi)_{0,0}|H_w|K_L\rangle+\langle(2\pi)_{2,0}|H_w|K_L\rangle\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}e^{i\delta_0}(pA_0-q\overline{A}_0)+e^{i\delta_2}(pA_2-q\overline{A}_2)\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{2}e^{i\delta_0}pA_0\left[(1-\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_0}{A_0})+e^{i(\delta_2-\delta_0)}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{pA_2-q\overline{A}_2}{pA_0}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}pA_0\left[\left(1-\frac{q}{p}\frac{\overline{A}^0}{A_0}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}\frac{A_2}{A_0}\left(1-\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_2}{A_2}\right)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}pA_0\left[\Delta_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_2\right], \tag{5.49}$$

其中

$$\Delta_I=1-\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_I}{A_I},\qquad \omega=\frac{A_2}{A_0}. \tag{5.50}$$

同样可推得

$$\langle\pi^0\pi^0|H_w|K_L\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\langle(2\pi)_{2,0}|H_w|K_L\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}\langle(2\pi)_{0,0}|H_w|K_L\rangle$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2}(pA_2-q\overline{A}_2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}(pA_0-q\overline{A}_0)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}pA_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_0\right], \tag{5.51}$$

$$\langle|\pi^+\pi^-|H_w|K_S\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\langle(2\pi)_{0,0}|H_w|K_S\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\langle(2\pi)_{2,0}|H_w|K_S\rangle$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}(pA_0+q\overline{A}_0)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2}(pA_2+q\overline{A}_2)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}pA_0\left[\left(1+\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_0}{A_0}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}\omega\left(1+\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_2}{A_2}\right)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}pA_0\left[(2-\Delta_0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}\omega(2-\Delta_2)\right], \tag{5.52}$$

$$\langle\pi^0\pi^0|H_w|K_S\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\langle(2\pi)_{2,0}|H_w|K_S\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}\langle(2\pi)_{0,0}|H_w|K_S\rangle$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2}(pA_2+q\overline{A}_2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}(pA_0+q\overline{A}_0)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}pA_0[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}\omega(1+\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_2}{A_2})-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_0}{A_0})]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}pA_0[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}\omega(2-\Delta_2)-\frac{1}{\sqrt{2}}(2-\Delta_0)]. \tag{5.53}$$

由 § 5.4 已知，$K_L\to2\pi$ 衰变分支比很小，只有 10^{-3} 量级，如果 CP 守恒则 $K_L\to2\pi$

不可能实现．显然当 CP 守恒时 $q=p=\frac{1}{\sqrt{2}}$，由(5.37)式有 $A_I=\overline{A}_I$，所以 $\Delta_0=\Delta_2=0$，因此(5.49)，(5.51)式均为 0，但 K_S 主要衰变为 2π 态，分支比几乎是 100%，所以在讨论 η_{+-}，η_{00}时，由(5.21)式可见，我们可以在 $K_S\to2\pi$ 振幅计算中作为初级近似，忽略 CP 破坏的修正．这样(5.52)，(5.53)式可简化为

$$\langle\pi^+\pi^-|H_w|K_S\rangle\xrightarrow{CP\text{ 守恒}}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\delta_0}pA_0\left[2+\sqrt{2}e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega\right], \tag{5.54}$$

$$\langle\pi^0\pi^0|H_w|K_S\rangle\xrightarrow{CP\text{ 守恒}}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\delta_0}pA_0\left[2e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega-\sqrt{2}\right]. \tag{5.55}$$

由(5.21)式，

$$\eta_{+-}=\frac{\Delta_0+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_2}{2+\sqrt{2}\omega e^{i(\delta_2-\delta_0)}}. \tag{5.56}$$

由于$|\Delta I|=1/2$ 规则，实验上给出$|\omega|=|A_2/A_0|\lesssim1/20$. 略去 ω^2 项，(5.56)式变为

$$\eta_{+-}=\frac{\Delta_0+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_2}{2\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega e^{i(\delta_2-\delta_0)}\right]}\approx\frac{1}{2}\left[\Delta_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\omega e^{i(\delta_2-\delta_0)}(\Delta_0-\Delta_2)\right]. \tag{5.57}$$

同样有

$$\begin{aligned}\eta_{00}&=\frac{e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_0}{2e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega-\sqrt{2}}\\&=\frac{e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_0}{-\sqrt{2}\left[1-\sqrt{2}\omega e^{i(\delta_2-\delta_0)}\right]}\\&\approx-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_2-e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega\Delta_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_0\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\Delta_0+\sqrt{2}e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega(\Delta_0-\Delta_2)\right].\end{aligned} \tag{5.58}$$

按通常文献上的定义，

$$\begin{cases}\eta_{00}=\epsilon-2\epsilon', \\ \eta_{+-}=\epsilon+\epsilon',\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\epsilon=\dfrac{2\eta_{+-}+\eta_{00}}{3}, \\ \epsilon'=\dfrac{\eta_{+-}-\eta_{00}}{3}.\end{cases} \tag{5.59}$$

将(5.57)和(5.58)式代入(5.59)式,可得

$$\begin{aligned}\epsilon&=\frac{1}{2}\Delta_0, \\ \epsilon'&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i(\delta_2-\delta_0)}\omega(\Delta_0-\Delta_2).\end{aligned} \tag{5.60}$$

由于 η_{+-},η_{00} 是实验上可观测的量,所以ϵ,ϵ'也是实验上可观测的量. 根据 Δ_0,Δ_2 的定义(5.50)式可知,$\dfrac{q}{p}\dfrac{\overline{A}}{A}$也是可观测量,因而与$|K^0\rangle$,$|\overline{K}^0\rangle$位相的重新定义无关. 这点的证明如下:由(5.47)式,$|K_S\rangle$,$|K_L\rangle$是物理的质量本征态,从而不应因$|K^0\rangle$,$|\overline{K}^0\rangle$位相的重新定义而改变两部分的相对位相,虽然$|K_S\rangle$,$|K_L\rangle$的总体位相可以改变. 因此,若

$$\begin{aligned}|K^0\rangle&\to e^{i\beta}|K^0\rangle, \\ |\overline{K}^0\rangle&\to e^{i\bar{\beta}}|\overline{K}^0\rangle,\end{aligned} \tag{5.61}$$

则(5.47)式的 p,q 必然也要改变相位,即

$$p\to e^{-i\beta}p, \quad q\to e^{-i\bar{\beta}}q, \tag{5.62}$$

这样一来,

$$\begin{aligned}A&=\langle f|H_w|K^0\rangle\to e^{i\beta}A, \\ \overline{A}&=\langle f|H_w|\overline{K}^0\rangle\to e^{i\bar{\beta}}\overline{A}, \\ \frac{q}{p}\frac{\overline{A}}{A}&\to e^{-i(\bar{\beta}-\beta)}\frac{q}{p}\cdot e^{-i(\bar{\beta}-\beta)}\frac{\overline{A}}{A}=\frac{q}{p}\frac{\overline{A}}{A},\end{aligned} \tag{5.63}$$

所以,$\dfrac{q}{p}\dfrac{\overline{A}}{A}$是相位重新定义(改变)的不变量,这也是物理可观测量的必备的性质.

现在讨论(5.18)式的$\bar{\epsilon}$和(5.60)式的ϵ 的关系. 实际上这两个量都和 CP 破坏的程度有关,但只有在某个特殊的位相约定,即吴-杨位相约定(Wu-Yang phase convention)[8]下二者才几乎相等. 按吴-杨的位相约定,选择 K^0 的位相使得 A_0 为实数,则在假定 CPT 不变的条件下,(5.36)式给出

$$\overline{A}_0=A_0^*=A_0,$$

其中最后一步用了 A_0 为实数的条件. 因此,

$$\epsilon=\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_0}{A_0}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{p}\right),$$

代入(5.18)式

$$\epsilon=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1-\bar{\epsilon}}{1+\bar{\epsilon}}\right]\approx\bar{\epsilon},$$

注意最后一步是因为

$$|\bar{\epsilon}|\sim10^{-3}.$$

这表明在吴-杨位相约定下,近似地有

$$\epsilon=\bar{\epsilon}. \tag{5.64}$$

由(5.59)式,

$$\left|\frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}}\right|^2=\frac{|\epsilon-2\epsilon'|^2}{|\epsilon+\epsilon'|^2}=\frac{|\epsilon|^2-4\mathrm{Re}(\epsilon^*\epsilon')+|\epsilon'|^2}{|\epsilon|^2+2\mathrm{Re}(\epsilon^*\epsilon')+|\epsilon'|^2}. \tag{5.65}$$

由(5.60)式可知,因$|\omega|\ll1$,所以$|\epsilon'|\ll|\epsilon|$,(5.65)式可略去$|\epsilon'|^2$项,故有

$$\left|\frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}}\right|^2\approx\frac{1-4\mathrm{Re}(\epsilon^*\epsilon')/|\epsilon|^2}{1+2\mathrm{Re}(\epsilon^*\epsilon')/|\epsilon|^2}\approx1-6\frac{\mathrm{Re}(\epsilon^*\epsilon')}{|\epsilon|^2}$$
$$=1-6\mathrm{Re}\left[\frac{\epsilon^*\epsilon'}{|\epsilon|^2}\right]=1-6\mathrm{Re}\left[\frac{\epsilon^*\epsilon'}{\epsilon^*\epsilon}\right]=1-6\mathrm{Re}\left[\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right], \tag{5.66}$$

由此可推出

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right]\approx\frac{1}{6}\left(1-\left|\frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}}\right|^2\right). \tag{5.67}$$

由(5.67)式,代入(5.22)式中的$|\eta|$测量值可给出[4]

$$\mathrm{Re}(\epsilon'/\epsilon)=(1.65\pm0.26)\times10^{-3}. \tag{5.68}$$

§ 5.7 η_{+-},η_{00}的实验测量

上节(§ 5.6)已谈到了$|\eta_{+-}|$,$|\eta_{00}|$的测量,其结果见(5.22)式.这里要给出η_{+-},η_{00}位相的测量方法.

用质子束打固体靶会产生K^0,$\overline{K}^0$束流,例如$t=0$时产生N_0个K^0,$\overline{N}_0$个$\overline{K}^0$,

$|K^0\rangle$随时间的演化为

$$|K^0(t)\rangle=|K_S(t)\rangle+|K_L(t)\rangle$$
$$=e^{-i(m_S-\frac{i}{2}\Gamma_S)t}|K_S\rangle+e^{-i(m_L-\frac{i}{2}\Gamma_L)t}|K_L\rangle, \qquad (5.69)$$

$|K^0(t)\rangle\to\pi\pi$ 的衰变几率振幅为

$$\langle\pi\pi|H_w|K^0(t)\rangle\sim\langle\pi\pi|H_w|K_S\rangle[e^{-i(m_S-\frac{i}{2}\Gamma_S)t}+\eta_{\pi\pi}e^{-i(m_L-\frac{i}{2}\Gamma_L)t}], \qquad (5.70)$$

其中

$$\eta_{\pi\pi}=\frac{\langle\pi\pi|H_w|K_L\rangle}{\langle\pi\pi|H_w|K_S\rangle}.$$

由(5.70)式可知衰变宽度. 注意到

$$\eta_{\pi\pi}=|\eta_{\pi\pi}|e^{i\phi_{\pi\pi}}, \qquad (5.71)$$
$$\Gamma(K^0(t)\to\pi\pi)\propto|\langle\pi\pi|H_w|K_S\rangle|^2[e^{-\Gamma_S t}+|\eta_{\pi\pi}|^2\ e^{-\Gamma_L t}$$
$$+2\cos(\Delta m_K t-\phi_{\pi\pi})|\eta_{\pi\pi}|e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_L+\Gamma_S)t}]. \qquad (5.72)$$

类似地,可导出

$$\Gamma(\overline{K}^0(t)\to\pi\pi)\propto|\langle\pi\pi|H_w|K_S\rangle|^2[e^{-\Gamma_S t}+|\eta_{\pi\pi}|^2\ e^{-\Gamma_L t}$$
$$-2\cos(\Delta m_K t-\phi_{\pi\pi})|\eta_{\pi\pi}|e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_L+\Gamma_S)t}]. \qquad (5.73)$$

t 时刻 K^0,$\overline{K}^0$ 衰变到 $\pi\pi$ 的事例数分别为

$$N(K^0(t)\to\pi\pi)=N_0[e^{-\Gamma_S t}+e^{-\Gamma_L t}|\eta_{\pi\pi}|^2+2|\eta_{\pi\pi}|e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_L+\Gamma_S)t}\cos(\Delta m_K t-\phi_{\pi\pi})],$$
$$N(\overline{K}^0(t)\to\pi\pi)=\overline{N}_0[e^{-\Gamma_S t}+e^{-\Gamma_L t}|\eta_{\pi\pi}|^2-2|\eta_{\pi\pi}|e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_L+\Gamma_S)t}\cos(\Delta m_K t-\phi_{\pi\pi})].$$
$$(5.74)$$

实验上只测量 K^0,$\overline{K}^0$ 到 $\pi\pi$ 的总事例数

$$N(p+A\to K^{neutral}(\to\pi\pi)+X)=(N_0+\overline{N}_0)(e^{-\Gamma_S t}+e^{-\Gamma_L t}|\eta_{\pi\pi}|^2)$$
$$+2(N_0-\overline{N}_0)|\eta_{\pi\pi}|e^{-\frac{\Gamma_L+\Gamma_S}{2}t}\cos(\Delta m_K-\phi_{\pi\pi}).$$
$$(5.75)$$

用 $N_0+\overline{N}_0$ 归一化上式,得

$$N(p+A\to K^{neutral}(\to\pi\pi)+X)$$
$$=e^{-\Gamma_S t}+|\eta_{\pi\pi}|^2\ e^{-\Gamma_L t}+2\frac{N_0-\overline{N}_0}{N_0+\overline{N}_0}|\eta_{\pi\pi}|\cos(\Delta m_K t-\phi_{\pi\pi}). \qquad (5.76)$$

测量总事例数与时间的依赖关系曲线即可定出相角 $\phi_{\pi\pi}$. 当然,我们不能确定 $\Delta m_K t-\phi_{\pi\pi}$的符号,因而测出的 ϕ 值可相差位相 π. 具体测量装置及方法可参阅文献[9].

ϕ_{+-},ϕ_{00}的最新实测值见 PDG 粒子表,即文献[4]:

假定 CPT 不变,

$$\begin{aligned}\phi_{+-}&=(43.51\pm0.05)^\circ,\\ \phi_{00}&=(43.52\pm0.05)^\circ;\end{aligned}\tag{5.77}$$

不假定 CPT 不变,

$$\begin{aligned}\phi_{+-}&=(43.4\pm0.7)^\circ,\\ \phi_{00}&=(43.7\pm0.8)^\circ.\end{aligned}\tag{5.78}$$

§5.8 K→3π 衰变中的 CP 破坏

3π 态比较复杂,总电荷为零的 3π 态有 $3\pi^0$ 和 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 两种情况.

对于$|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle$态,因是全同玻色子系统,其总同位旋只有 $I=1,3$ 态(因$|\pi^0\pi^0\rangle$态总同位旋只有 0,2),$3\pi^0$ 态对任何两个 π^0 交换都对称,而 π^0 介子的 C 和 P 宇称为 $C=+1,P=-1$,即 $CP|\pi^0\rangle=-|\pi^0\rangle$,所以 $CP|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle=-|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle$,即 $3\pi^0$ 态 CP 宇称为-1.

但对 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 态,情形就不同了.假定 $\pi^+\pi^-$之间的相对角动量为 l,$\pi^+\pi^-$对与 π^0 之间的相对角动量为 l',如图 5.5 所示,因 $K_{L,S}$为 O^- 介子,所以 3π 态总角动量

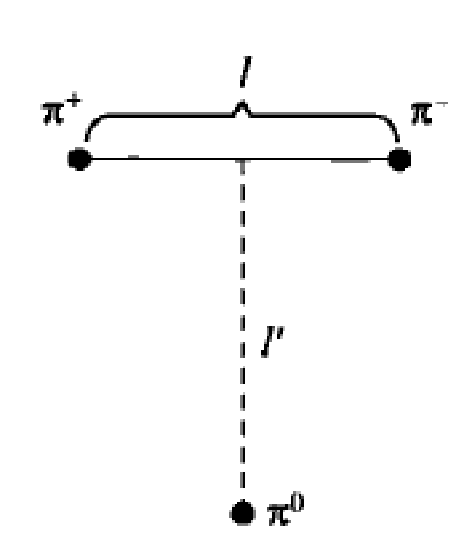


图 5.5 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 相对角动量

必须为零,这要求

$$l=l'.$$

因 P,C 对$|\pi^+\pi^-\rangle$的作用都相当于 π^+ 和 π^- 互换,所以 $CP|\pi^+\pi^-\rangle=|\pi^+\pi^-\rangle$,而不管 l 是多少.但 CP 的作用对$|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$而言将给出额外的$(-1)^{l'}(-1)$因子($CP|\pi^0\rangle=-|\pi^0\rangle$及$(-1)^{l'}$同时存在),所以

$$\begin{aligned}CP|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle&=-(-1)^{l'}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle=-(-1)^{l}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle\\ &=(-1)^{l+1}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle.\end{aligned}\tag{5.79}$$

$\pi^+\pi^-$ 角动量 l,$\pi^+\pi^-\pi^0$ 总同位旋和 CP 的关系列在表 5.1 中,其总 CP 量子数有正有负.

表 5.1　*CP*, *l*, *I* 的关系

$\pi^+\pi^-$ 同位旋	0	1	2
$\pi^+\pi^-$ 角动量 l	偶	奇	偶
$\pi^+\pi^-\pi^0$ 总同位旋	1	0,2	1,3
$\pi^+\pi^-\pi^0$ 总 *CP*	−	+	−

从上面的讨论我们知道，对总同位旋而言，$|3\pi^0\rangle$ 总同位旋

$$I=1,3,$$

$|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$ 总同位旋

$$I=0,1,2,3.$$

总同位旋的结果很容易从同位旋（角动量）耦合规则得到. 引入 G 宇称的分析方法，Grimus 给出[10] 3π 态（$3\pi^0$ 和 $\pi^+\pi^-\pi^0$）的 *CP* 宇称由总同位旋决定，即

$$\eta_{CP}=(-1)^I. \tag{5.80}$$

显然，$|3\pi^0\rangle$ 态 *CP* 总为负宇称，但 $|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$ 态的 *CP* 宇称有正有负.

可以看出，$K_S\to3\pi^0$ 过程破坏 *CP*. 实验上可测量

$$\eta_{000}=\frac{A(K_S\to3\pi^0)}{A(K_L\to3\pi^0)}. \tag{5.81}$$

2008 年 PDG 给出的数据为[4]

$$|\eta_{000}|<0.018,\quad CL=90\%;$$
$$\mathrm{Im}\eta_{000}=(-0.1\pm1.6)\times10^{-2},\quad CL=90\%.$$

对 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 态，因 $CP=\pm1$ 混在一起，所以 $K_S\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 并不一定破坏 *CP*，但 $|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle CP=+1$ 态总同位旋 $I=0,2$ 而相应的 $\pi^+\pi^-$ 同位旋为 1，角动量也为奇数（见表 5.1），故对 $\pi^+\pi^-$ 交换反对称，因此 K_S 衰变到 $|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle CP$ 为正的末态虽然是 $\Delta I=1/2,3/2$ 的 *CP* 守恒相互作用，但因对 $\pi^+\pi^-$ 交换反对称而在 Dalitz 图上积分贡献为零，所以用 Dalitz 图分析只测得 *CP* 不守恒的部分

$$\eta_{+-0}=\frac{A(K_S\to\pi^+\pi^-\pi^0;CP=-1)}{A(K_L\to\pi^+\pi^-\pi^0)}. \tag{5.82}$$

2008 年 PDG 给出的值为

$$\mathrm{Im}\eta_{+-0}=-0.002\pm0.009,\quad CL=90\%.$$

CP 为正的 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 态定有 $l=1,3,\cdots$［见(5.79)式］，所以 $K_L\to CP$ 为正的 $|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$ 态被角动量位垒压低而可以忽略.

§5.9 T破坏的直接实验检验

如果假定 CPT 不变，显然 CP 破坏意味着 T 也破坏，这样才能保证 CP 和 T 的乘积保持不变．如果某个物理过程 CP 不守恒，如 $K_L\to\pi\pi$，则由 CPT 不变性可以推断在 $K_L\to\pi\pi$ 中 T 也不守恒，但这是基于 CPT 不变性的间接推断，并不是 T 破坏的直接检验．

T 破坏的直接检验来自 Kabir[11]．T 守恒则有 $\overline{K}^0\to K^0$ 的几率等于 $K^0\to\overline{K}^0$ 的几率，即

$$\Gamma(\overline{K}^0\to K^0)=\Gamma(K^0\to\overline{K}^0). \tag{5.83}$$

(5.83)式与 CPT 不变或破坏都没有关系．

由§4.3的讨论可知，在对 CPT 不做任何假定的情况下，将(4.54)式用于 K^0-$\overline{K}^0$ 系统，得

$$\begin{aligned}|K_L\rangle&=p_L|K^0\rangle-q_L|\overline{K}^0\rangle,\\|K_S\rangle&=p_S|K^0\rangle-q_S|\overline{K}^0\rangle.\end{aligned} \tag{5.84}$$

由(4.61)式，直接的 T 破坏或 CP 破坏参数

$$\delta=\frac{|p_S/q_S|-|q_L/p_L|}{|p_S/q_S|+|q_L/p_L|}, \tag{5.85}$$

CPT 破坏的参数为

$$\theta=\frac{q_L/p_L-q_S/p_S}{q_L/p_L+q_S/p_S}=\frac{\zeta_K-1}{\zeta_K+1}, \tag{5.86}$$

$$\zeta_K=\frac{q_L/p_L}{q_S/p_S}. \tag{5.87}$$

实验上标定末态 K^0 或 $\overline{K}^0$ 可用半轻子衰变，即 K^0 只衰变到 l^+，$\overline{K}^0$ 只到 l^-，

$$\overline{K}^0\to l^-\bar{\nu}_l\pi^+,\quad K^0\to l^+\nu_l\pi^-. \tag{5.88}$$

对于初态 K^0，$\overline{K}^0$ 的标定，在 CPLEAR 质子-反质子湮没实验中有

$$p\,\overline{p}\to K^+\overline{K}^0\pi^-,\quad p\,\overline{p}\to K^-K^0\pi^+, \tag{5.89}$$

则由 K^+ 标定 $\overline{K}^0$，K^- 标定 K^0．

最简单的情形，即 CPT 不变时，(5.85)式退化为

$$\delta_T=\frac{|p/q|-|q/p|}{|p/q|+|q/p|}. \tag{5.90}$$

CPLEAR 测量的是

$$\mathscr{A}_T(t)=\frac{\Gamma(\overline{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0;t)-\Gamma(\mathrm{K}^0\to\overline{\mathrm{K}}^0;t)}{\Gamma(\overline{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0;t)+\Gamma(\mathrm{K}^0\to\overline{\mathrm{K}}^0;t)}. \tag{5.91}$$

在 CPT 不变的条件下，

$$\begin{aligned}|\mathrm{K}_S\rangle&=p|\mathrm{K}^0\rangle+q|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle,\\|\mathrm{K}_L\rangle&=p|\mathrm{K}^0\rangle-q|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle,\\CP|\mathrm{K}^0\rangle&=|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle,\end{aligned} \tag{5.92}$$

其中

$$p=\frac{1+\bar{\epsilon}}{\sqrt{2(1+|\bar{\epsilon}|^2)}},\quad q=\frac{1-\bar{\epsilon}}{\sqrt{2(1+|\bar{\epsilon}|^2)}}.$$

我们容易导出

$$\begin{aligned}|\mathrm{K}^0\rangle&=\frac{1}{2p}(|\mathrm{K}_S\rangle+|\mathrm{K}_L\rangle),\\|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle&=\frac{1}{2q}(|\mathrm{K}_S\rangle-|\mathrm{K}_L\rangle).\end{aligned} \tag{5.93}$$

$t=0$ 时的 $|\mathrm{K}^0\rangle$ 和 $|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle$ 到 t 时刻变为

$$\begin{aligned}|\mathrm{K}^0(t)\rangle&=g_+(t)|\mathrm{K}^0\rangle+\frac{q}{p}g_-(t)|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle,\\|\overline{\mathrm{K}}^0(t)\rangle&=\frac{p}{q}g_-(t)|\mathrm{K}^0\rangle+g_+(t)|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle,\end{aligned} \tag{5.94}$$

其中

$$g_\pm(t)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_S-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_S)t}\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_L-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_L)t}\right].$$

由(5.94)式易导出

$$\begin{aligned}\Gamma(\overline{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0;t)&\propto\left|\frac{p}{q}\right|^2|g_-(t)|^2,\\\Gamma(\mathrm{K}^0\to\overline{\mathrm{K}}^0;t)&\propto\left|\frac{q}{p}\right|^2|g_-(t)|^2.\end{aligned} \tag{5.95}$$

代入(5.91)式，得

$$\mathscr{A}_T(t)=\frac{|p/q|^2-|q/p|^2}{|p/q|^2+|q/p|^2}\approx4\mathrm{Re}\,\bar{\epsilon}. \tag{5.96}$$

(5.96)式既直接破坏 T 不变，也直接破坏 CP 不变．(5.96)式与时间 t 无关．

CPLEAR 的实验结果为[12]

$$\mathcal{A}_T=(6.6\pm1.3\pm1.0)\times10^{-3}. \tag{5.97}$$

参 考 文 献

[1] Rochester G D, Butler C C. Nature, 1947, 160: 855.

[2] Gell-Mann M. Phys. Rev. D, 1953, 92: 833.

[3] Nakano T, Nishijima K, Prog. Theor. Phys., 1953, 10: 580.

[4] PDG. Particle Physics Booklet. 2010 edition.

[5] Lande K, et al. Phys. Rev., 1956, 101: 1901.

[6] Christenson J H, Cronin J W, Fitch V L, et al. Phys. Rev. Lett., 1964, 13: 138.

[7] Gewenger C, et al. Phys. Lett. B, 1974, 48: 483. Fitch V L, et al. Phys. Rev. Lett., 1973, 31: 1524. Williams H H, et al. Phys. Rev. Lett., 1973, 31: 1521.

[8] Wu T T, Yang C N. Phys. Rev. Lett., 1964, 13: 380.

[9] Carosi R, et al. Phys. Lett. B, 1990, 237: 303. Adler R, et al. Phys. Lett. B, 1995, 363: 243. Schwingheuer B, et al. Phys. Rev. Lett., 1998, 74: 4376. Karlsson M, et al. Phys. Rev. Lett., 1990, 64: 2976.

[10] Grimus W. Fortschr. Phys., 1988, 36: 201.

[11] Kabir P K. Phys. Rev. D, 1970, 2: 540.

[12] Angelopoulos A, et al. (CPLEAR Collaboration). Phys. Rev. B, 1998, 444: 43.

第六章　B 介子系统中的 *CP* 破坏

CP 不守恒是 1964 年在 K^0-$\overline{K}^0$ 系统的 $K_L \to \pi\pi$ 过程中首次发现的．但直到 2001 年，即 37 年后，才在 $B^0 \to \psi K_S$ 过程中再次被观察到．此后在 B 介子系统中观察到了一系列的 *CP* 不守恒的过程．B 介子的衰变已成为检验 *CP* 破坏机制的好场所．由于 B 介子质量很大（$m_B > 5$ GeV），其衰变涉及的动量转移 Q^2 也很大，这使微扰计算更可靠，理论计算的结果与实验测量比较才更有意义．此外，B 介子衰变涉及的幺正三角形（见 § 3.6 节）实验上容易测量．以上种种，使 B 介子的稀有衰变成为检验标准模型和寻找新物理的理想场所．这就是 B 物理近 20 年来一直是粒子物理实验和理论研究的前沿热点的原因．

§ 6.1　B 介子的发现

1974 年丁肇中领导的实验组在布鲁克海文实验室的 AGS 加速器上观测到了一个新的重粒子 J 粒子[1]．这个新的重粒子是通过在 $p + Be \to e^+ + e^- + X$ 过程中用双臂谱仪测 e^+e^- 的不变质量谱中的共振峰而看到的，其质量为 3.1 GeV，宽度极窄（寿命极长）．与此同时，Burton Richter 领导的实验组在斯坦福直线加速器中心的 $e^- e^-$ 储存环（SPEAR）上也观测到了 3.1 GeV 的共振峰，并命名为 ψ 粒子[2]．两个组的结果同时发表在 Phys. Rev. Lett. 上．J/ψ 粒子被解释为粲夸克 c 及其反夸克的束缚态（$c\bar{c}$）．此后的研究表明，这个重粒子的自旋为 1，宇称和电荷共轭宇称均为负，即它是 $J^{PC} = 1^{--}$ 的矢量介子．

1977 年 Leon Lederman 领导的实验组在费米国家实验室的 400 GeV 质子同步加速器上发现了一个新的重粒子 $\Upsilon(9.5)$[3]．这个粒子是在 $p + (Cu, Pt) \to \mu^+\mu^- + X$ 过程中测量 $\mu^+\mu^-$ 对时发现的．$\Upsilon(9.5)$ 后来在德国汉堡的 e^+e^- 对撞机和康奈尔大学的 e^+e^- 对撞机上被仔细研究．$\Upsilon(1S)$，$\Upsilon(2S)$…$\Upsilon(5S)$ 先后被发现．特别是，Υ 家族完全可以用正反 b 夸克的束缚态解释，并且它们也是 $J^{PC} = 1^{--}$ 的重介子．

$\Upsilon(4S)$ 有一特性，它大部分时间衰变为 $B\overline{B}$ 对．这一点被两个实验组 CLEO 和 CUSP 同时观测到[4]．这里 $B\overline{B}$ 对．指 $B_d = (\bar{b}d)$，$\overline{B}_d = (b\bar{d})$，是质量最低的 B 介子．以后我们会看到，$B_s = (\bar{b}s)$，$B_u^+ = (\bar{b}u)$，$B_c^+ = (\bar{b}c)$ 等都被相继发现．

§ 6.2　B 介子的标定(tagging)及其基本物理参数

B 介子的质量、寿命，中性 B 介子 B_d^0，B_s^0 的质量本征态中重的和轻的态的质量差、宽度差等都已测量，详细情况可参阅粒子表[5]. 我们只列少量的结果如下：

$$m_{B_u^\pm}=5279.15\pm0.13\ \text{MeV},$$
$$\tau_{B_u^\pm}=(1.638\pm0.011)\times10^{-12}\,\text{s},$$
$$m_{B_d^0}=5279.53\pm0.33\ \text{MeV},$$
$$\tau_{B_d^0}=(1.530\pm0.009)\times10^{-12}\,\text{s},$$
$$\Delta m_{B_d}=m_{B_H}-m_{B_L}=(3.337\pm0.033)\times10^{-10}\ \text{MeV},$$
$$m_{B_s^0}=5366.3\pm0.6\ \text{MeV},$$
$$\tau_{B_s^0}=(1.470^{+0.026}_{-0.027})\times10^{-12}\,\text{s},$$
$$\Delta m_{B_s^0}=(117.0\pm0.8)\times10^{-10}\,\text{MeV},$$
$$m_{B_c^\pm}=6.276\pm0.004\ \text{GeV},$$
$$\tau_{B_c}=(0.46\pm0.07)\times10^{-12}\,\text{s}.$$

在实验上如何判定我们看到的是哪种 B 介子呢？当然质量的测量很重要，但这还不够，还须结合别的办法才能确认.

对带电的 $B_u^\pm$，$B_c^\pm$，除衰变末态不变质量与实验给出的相近以外，只要再加上末态电荷就可确认. 如 $B_u^+\to l^+\nu_l X_c^0$，末态总电荷为正，X_c^0 指带粲的，且为中性的末态粒子. 从末态电荷为正，再结合质量，可判断为 B_u^+.

对中性 B_d^0 介子，我们知道 $\Upsilon(4S)$ 几乎全部衰变到 $B\overline{B}$，其中 $B_u^+B_u^-$ 占 $(51.6\pm0.6)\%$，$B_d^0\overline{B}_d^0$ 占 $(48.4\pm0.6)\%$. 此时对 $B_d^0\overline{B}_d^0$ 的标定主要用半轻子衰变，即用

$$B_d^0\to l^+\nu_l X,\quad \overline{B}_d^0\to l^-\bar{\nu}_l X$$

来标定. 因 B_d^0 只衰变到 l^+，$\overline{B}_d^0$ 只衰变到 l^-，从末态轻子 l^+，l^- 即可知道是 B_d^0 还是 $\overline{B}_d^0$.（见图 6.1）显然，当标定了一方为 B_d^0 时，另一方定为 $\overline{B}_d^0$，这是因为 $\Upsilon(4S)$ 的 $J^{PC}=1^{--}$，C 宇称为负，角动量为 1. $\Upsilon(4S)\to B\overline{B}$ 是强衰变，C 宇称守恒. BB，$\overline{B}\overline{B}$ 态不是 C 宇称本征态，因此末态只能是 $B\overline{B}$. 如果 $B^0(\overline{B}^0)$ 通过弱相互作用振荡到了 $\overline{B}^0(B^0)$，末态也不可能在同一时刻 t 为 B^0B^0 或 $\overline{B}^0\overline{B}^0$，这是因为 BB，$\overline{B}\overline{B}$ 是全同玻色子，总角动量只能为 0，2 等偶数，而初态 $\Upsilon(4S)$ 角动量为 1，故角动量守恒不允许其发生.

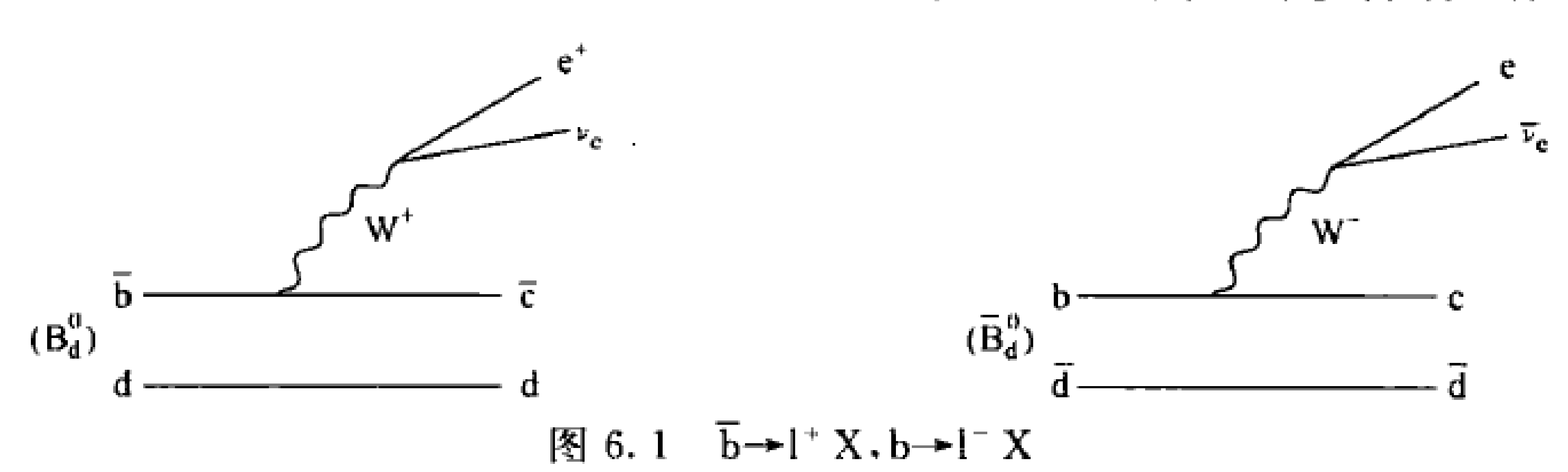


图 6.1　$\bar{b}\to l^+X$，$b\to l^-X$

采用什么方法标定与实验过程有关．如

$$Z^0 \to B_d^0 B_u^- X, \overline{B}_d^0 B_u^+ X$$

过程，可以看出，B_u^+ 一定伴随 $\overline{B}_d^0(b\overline{d})$，$B_u^-$ 一定伴随 $B_d^0(\overline{b}d)$，因此用 $B_u^\pm$ 可标定 B_d^0，$\overline{B}_d^0$. 这样产生的 B_d^0，$\overline{B}_d^0$ 是不相干的(incoherent)，这与 $\Upsilon(4S) \to B\overline{B}$ 标定出的 B^0，$\overline{B}^0$ 不同，那里 B_d^0，$\overline{B}_d^0$ 是相干的(coherent)，因 *C* 宇称要保持为 -1. 费米实验室(Fermilab)也采用"$\pi^\pm$ near B"来标定，即 π^+ 一定出现在 B_d^0 附近($B_d^0\pi^+$)，π^- 一定出现在 $\overline{B}_d^0$ 附近($\overline{B}_d^0\pi^-$). 用 $B_u^\pm$，$\pi^\pm$ 标定的示意图见图 6.2.

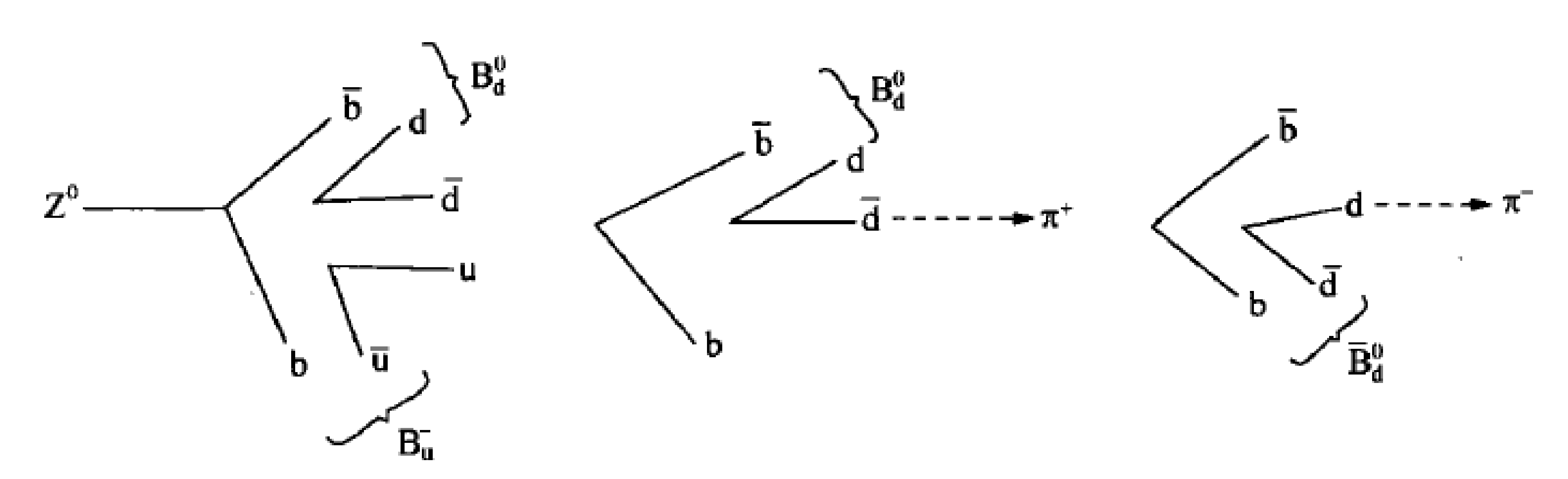


图 6.2　用 $B_u^\pm$ 和 $\pi^\pm$ 来标定 B^0 $\overline{B}^0$

不同的实验根据 B 介子产生和衰变过程来寻找不同的方法标定 B 介子. 上面给出的例子并不完全，但可以说明问题了．

§6.3　B_d^0-$\overline{B}_d^0$ 混合及 Δm，$\Delta\Gamma$ 的计算

与 K^0-$\overline{K}^0$ 系统类似，中性 B 介子及其反粒子也可以通过共同的衰变末态而变来变去，我们称之为 B_d^0-$\overline{B}_d^0$ 混合(mixing)或 B_d^0-$\overline{B}_d^0$ 振荡(oscillation).

1987 年，在德国汉堡正负电子对撞机(DESY)工作的 ARGUS 实验组首先观察到了 B_d^0-$\overline{B}_d^0 \to \mu^\pm \mu^\pm + X$，即 $B\overline{B}$ 到同号轻子的衰变事例[6]，证明了 $B_d^0 \leftrightarrows \overline{B}_d^0$ 确有振荡(混合)，并测得混合参数

$$x = \frac{\Delta m_B}{\Gamma_B} \approx 0.7. \tag{6.1}$$

这里 Δm_B 是 B_d^0-$\overline{B}_d^0$ 系统两个质量本征态的质量差，Γ_B 为两个质量本征态的平均宽度．

ARGUS 实验过程为

$$e^+ e^- \to \Upsilon(4S) \to B_d^0 \overline{B}_d^0 \to \mu^\pm \mu^\pm + X, \tag{6.2}$$

X 代表任何末态．显然，如果我们标定了一个 $B_d^0 \to l^+ \nu_l X$ 过程，则另一方向飞出的定为 $\overline{B}_d^0$(见 §6.2)，而 $\overline{B}_d^0$ 只能有 $\overline{B}_d^0 \to l^- \overline{\nu}_l X$ 的衰变，即末态轻子为 $l^+ l^-$. 要想得到

同号轻子除非 $\overline{B}_d^0$ 通过混合变为 B_d^0，B_d^0 再发生 $l^+\nu_l X$ 的衰变，这样才有 l^+l^+ 末态．同样的，如果 $\overline{B}_d^0\to l^-\bar{\nu}_l X$ 而另一端 B_d^0 振荡到 $\overline{B}_d^0$ 也发生 $\overline{B}_d^0\to l^-\bar{\nu}_l X$，则有 l^-l^- 末态．这就是混合造成 l^+l^+，l^-l^- 同号轻子末态的过程．要指出的是，实验上必须排除次级衰变的轻子 l^- 造成的 l^+l^+，l^-l^- 假事例，如

$$B^0\overline{B}^0\to[l^+X_1]\ [D+X_2] \qquad (6.3)$$
$$\qquad\qquad\qquad\quad \hookrightarrow l^+X$$

这样的次级 l^+（从 D 衰变而来）可用运动学的方法排除，如 $l^{\pm}$ 横动量的限制等．

实际上，(6.2)式中的 $B\overline{B}$ 是相干的，因为 $\Upsilon(4S)$ 为 $J^{PC}=1^{--}$ 的矢量介子，C 宇称为负，产生的 $B^0\overline{B}^0$ 也处于 C 宇称为负的态，所以末态对 B_d^0，$\overline{B}_d^0$ 交换应反对称，即

$$|B_d^0\overline{B}_d^0\rangle_{C=-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}[|B_d^0(\boldsymbol{k})\overline{B}_d^0(-\boldsymbol{k})\rangle-|B_d^0(-\boldsymbol{k})\overline{B}_d^0(\boldsymbol{k})\rangle]. \qquad (6.4)$$

对 $C=+1$ 的态，只要把(6.4)式的负号改为正号即可，即

$$|B_d^0\overline{B}_d^0\rangle_{C=+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}[|B_d^0(\boldsymbol{k})\overline{B}_d^0(-\boldsymbol{k})\rangle+|B_d^0(-\boldsymbol{k})\overline{B}_d^0(\boldsymbol{k})\rangle]. \qquad (6.5)$$

(6.4)，(6.5)式可统一写成

$$|B_d^0\overline{B}_d^0\rangle_{C=\pm1}=\frac{1}{\sqrt{2}}[|B_d^0(\boldsymbol{k})\overline{B}_d^0(-\boldsymbol{k})\rangle\pm|B_d^0(-\boldsymbol{k})\overline{B}_d^0(\boldsymbol{k})\rangle]. \qquad (6.6)$$

注意(6.6)式含有对时间的依赖．若向 $\boldsymbol{k}$ 方向飞行的 B 或 $\overline{B}$ 对时间的依赖用 t_1 表示，$-\boldsymbol{k}$ 方向的用 t_2 表示，则利用 $g_+(t)$，$g_-(t)$ 的表达式(4.86)及

$$|B^0(t)\rangle=g_+(t)|B^0\rangle+\frac{q}{p}g_-(t)|\overline{B}^0|, \qquad (6.7)$$

$$|\overline{B}^0(t)\rangle=\frac{p}{q}g_-(t)|B^0\rangle+g_+(t)|\overline{B}^0|, \qquad (6.8)$$

假定 $\Delta\Gamma=0$（这是一个好的近似），则

$$\begin{aligned}|B^0\overline{B}^0\rangle_{C=\pm1}&=\frac{1}{\sqrt{2}}[|B^0(\boldsymbol{k},t_1)\overline{B}^0(-\boldsymbol{k},t_2)\rangle\pm|B^0(-\boldsymbol{k},t_2)\overline{B}^0(\boldsymbol{k},t_1)\rangle]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{im(t_1+t_2)-\frac{\Gamma}{2}(t_1+t_2)}\left\{i\sin\frac{\Delta m}{2}(t_2\pm t_1)\left[\frac{p}{q}|B_{\boldsymbol{k}}^0B_{-\boldsymbol{k}}^0\rangle\pm\frac{q}{p}|\overline{B}_{\boldsymbol{k}}^0\overline{B}_{-\boldsymbol{k}}^0\rangle\right]\right.\\&\quad\left.+\cos\frac{\Delta m}{2}(t_2\pm t_1)[|B_{\boldsymbol{k}}^0\overline{B}_{-\boldsymbol{k}}^0\rangle\pm|B_{-\boldsymbol{k}}^0\overline{B}_{\boldsymbol{k}}^0\rangle]\right\},\end{aligned} \qquad (6.9)$$

其中 $|B_{\boldsymbol{k}}^0B_{-\boldsymbol{k}}^0\rangle$ 是 $|B_{\boldsymbol{k}}^0\rangle|B_{-\boldsymbol{k}}^0\rangle$ 的简写，$|\overline{B}_{\boldsymbol{k}}^0\ \overline{B}_{-\boldsymbol{k}}^0\rangle$ 是 $|\overline{B}_{\boldsymbol{k}}^0\rangle|\overline{B}_{-\boldsymbol{k}}^0\rangle$ 的简写.

从方程(6.9)可看出:C 为负的态在 $t_1=t_2=t$ 时因 $\sin\frac{\Delta m}{2}(t-t)=0$,只有 $B^0\overline{B}^0$ 的态存在,这是因为末态 B^0B^0 或 $\overline{B}^0\overline{B}^0$ 不可能同时存在. 现在计算由于混合造成的同号轻子末态的宽度. 因

$$\begin{aligned}&B^0\to l^++X\leftarrow\overline{B}^0,\\&\overline{B}^0\to l^-+X\leftarrow\overline{B}^0,\end{aligned}\tag{6.10}$$

所以由(6.9)式有 $B_k^0\to l_1^+$, $B_{-k}^0\to l_2^+$ 的振幅

$$\begin{aligned}\langle l_1^+l_2^+X|H_w|B^0\overline{B}^0\rangle_{C=\pm1}=&\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-im(t_1+t_2)}e^{-\frac{\Gamma}{2}(t_1+t_2)}\frac{p}{q}i\sin\frac{\Delta m}{2}(t_2\pm t_1)\\&\times\langle l_1^+l_2^+X|H_w|B_k^0B_{-k}^0\rangle.\end{aligned}\tag{6.11}$$

当然,也可能 l_1^+ 由 B_{-k}^0, l_2^+ 由 B_k^0 衰变而来.

$$\begin{aligned}\langle l^+l^+X|H_w|B^0\overline{B}^0\rangle_{C=\pm1}=&\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p}{q}i\sin\frac{\Delta m}{2}(t_2\pm t_1)\\&\times e^{-im(t_1+t_2)}e^{-\frac{\Gamma}{2}(t_1+t_2)}\langle l^+l^+X|H_w|B_k^0B_{-k}^0\rangle,\end{aligned}\tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}\langle l^-l^-X|H_w|B^0\overline{B}^0\rangle_{C=\pm1}=&\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm i)\frac{q}{p}\sin\frac{\Delta m}{2}(t_2\pm t_1)\\&\times e^{-im(t_1+t_2)}e^{-\frac{\Gamma}{2}(t_1+t_2)}\langle l^-l^-X|H_w|\overline{B}_k^0\overline{B}_{-k}^0\rangle.\end{aligned}\tag{6.13}$$

假定.

$$|\langle l_k^+l_{-k}^+X|H_w|\overline{B}_k^0\overline{B}_{-k}^0\rangle|=|\langle l_k^-l_{-k}^-X|H_w|\overline{B}_k^0\overline{B}_{-k}^0\rangle|=|\langle l_k^+l_{-k}^-|H_w|B_k^0\overline{B}_{-k}^0\rangle|,\tag{6.14}$$

这里 l_k, l_{-k} 分别代表在 $\boldsymbol{k}$ 方向和 $-\boldsymbol{k}$ 方向飞出的轻子 l,则

$$\begin{aligned}&\Gamma[(B^0\overline{B}^0)_{C=\mp1}\to l^+l^+X]\propto e^{-\Gamma(t_1+t_2)}\left|\frac{p}{q}\right|^2\sin^2\frac{\Delta m}{2}(t_1\mp t_2),\\&\Gamma[(B^0\overline{B}^0)_{C=\mp1}\to l^-l^-X]\propto e^{-\Gamma(t_1+t_2)}\left|\frac{q}{p}\right|^2\sin^2\frac{\Delta m}{2}(t_1\mp t_2),\\&\Gamma[(B^0\overline{B}^0)_{C=\mp1}\to l^\pm l^\mp X]\propto e^{-\Gamma(t_1+t_2)}\cos^2\frac{\Delta m}{2}(t_1\mp t_2).\end{aligned}\tag{6.15}$$

注意在(6.15)式中我们略去了公共因子,包括相空间因子. 将(6.15)式对 t_1, t_2 积分得

$$N_{++}=N[(B^0\overline{B}^0)_{C=\pm1}\to l^+l^+X]\propto\left|\frac{p}{q}\right|^2\left[1-\frac{1\pm x^2}{(1+x^2)^2}\right],$$

$$N_{--}=N[(B^0\bar{B}^0)_{C=\pm 1}\to l^-l^- X)\propto\left|\frac{q}{p}\right|^2\left[1-\frac{1\pm x^2}{(1+x^2)^2}\right], \tag{6.16}$$

$$N_{+-}=N[(B^0\bar{B}^0)_{C=+1}\to l^+l^+ + X]\propto\left[1+\frac{1\pm x^2}{(1+x^2)^2}\right],$$

其中 $x=\dfrac{(\Delta m)_B}{\Gamma_B}$,并假定$\dfrac{\Delta\Gamma}{\Gamma}\ll 1$,$\Delta\Gamma\approx 0$.

实验上首先测出 B_d^0-$\bar{B}_d^0$ 混合参数的是 ARGUS 小组[6],他们测的是 $C=-1$ 的情形,

$$r=\left.\frac{N_{++}+N_{--}}{N_{+-}}\right|_{C=-1}\approx\frac{x^2}{2+x^2}. \tag{6.17}$$

导出(6.17)式时已假定$|q/p|\approx|p/q|\approx 1$.

最新数据由 PDG 粒子表即文献[5]给出:

$$x\approx 0.770\pm 0.008,\Delta m_B=(3.337\pm 0.033)\times 10^{-10}\,\text{MeV}. \tag{6.18}$$

由混合诱导的 CP 破坏[见(4.99)式]在 $C=-1$,即 $e^+e^-\to B\bar{B}$时的情形,有

$$a=\frac{N_{--}-N_{++}}{N_{--}+N_{++}}=\frac{|q/p|^2-|p/q|^2}{|q/p|^2+|p/q|^2}=\frac{1-|p/q|^4}{1+|p/q|^4}. \tag{6.19}$$

这就是同号轻子的 CP 不对称参数.由(6.19)式可看出,这是一个非常小的量,因而,实验上对其测量很困难,至今没有测量出结果.

现在来计算$(\Delta m)_B$ 和$(\Delta\Gamma)_B$.我们采用第四章(4.54)式来描述 B 介子的重和轻的质量本征态,

$$\begin{aligned}|B_H^0\rangle&=p|B^0\rangle-q|\bar{B}^0\rangle,\\|B_L^0\rangle&=p|B^0\rangle+q|\bar{B}^0\rangle,\end{aligned} \tag{6.20}$$

其中的 B^0 可以是 B_d^0 也可以是 B_s^0.

由于 B^0 介子很重($m_B>5$ GeV),所以其衰变道很多,使得 B_H,B_L 的寿命相差很小,这点与 K^0-$\bar{K}^0$ 系统完全不同.这就是我们用重、轻来描写 B 介子质量本征态,而不用长寿命和短寿命来描写的原因.

由(4.57)式,在 CPT 不变假设下有

$$\Delta\mu=\mu_H-\mu_L=\Delta m-\frac{i}{2}\Delta\Gamma=\sqrt{4H_{12}H_{21}}, \tag{6.21}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Delta m=m_H-m_L>0,\\&\Delta\Gamma=\Gamma_H-\Gamma_L,\\&H_{12}=M_{12}-\frac{i}{2}\Gamma_{12},H_{21}=M_{12}^*-\frac{i}{2}\Gamma_{12}^*.\end{aligned} \tag{6.22}$$

(6.21)式两边平方,得

$$(\Delta m)^2-\frac{1}{4}(\Delta\Gamma)^2-\mathrm{i}\Delta m\Delta\Gamma=4\left[|M_{12}|^2-\frac{1}{4}|\Gamma_{12}|^2-\mathrm{iRe}(M_{12}^*\Gamma_{12})\right]. \quad (6.23)$$

由此可推出

$$(\Delta m)^2-\frac{1}{4}(\Delta\Gamma)^2=4|M_{12}|^2-|\Gamma_{12}|^2,$$
$$(\Delta m)(\Delta\Gamma)=4\mathrm{Re}(M_{12}^*\Gamma_{12}). \quad (6.24)$$

注意,(6.22)式中 $\Delta\Gamma$ 的符号并未确定,对 K^0-$\overline{K}^0$,$K_H^0=K_L$,即重的质量本征态寿命长(Γ 小),相应的 $\Delta\Gamma<0$.

为了计算 Δm 和 $\Delta\Gamma$,由(6.24)式可知．须计算 M_{12} 与 Γ_{12}. 由于 B 介子质量大,$B^0\to\overline{B}^0$ 的跃迁完全可由箱图(图 6.3)描写,计算结果在文献[7]已给出,为

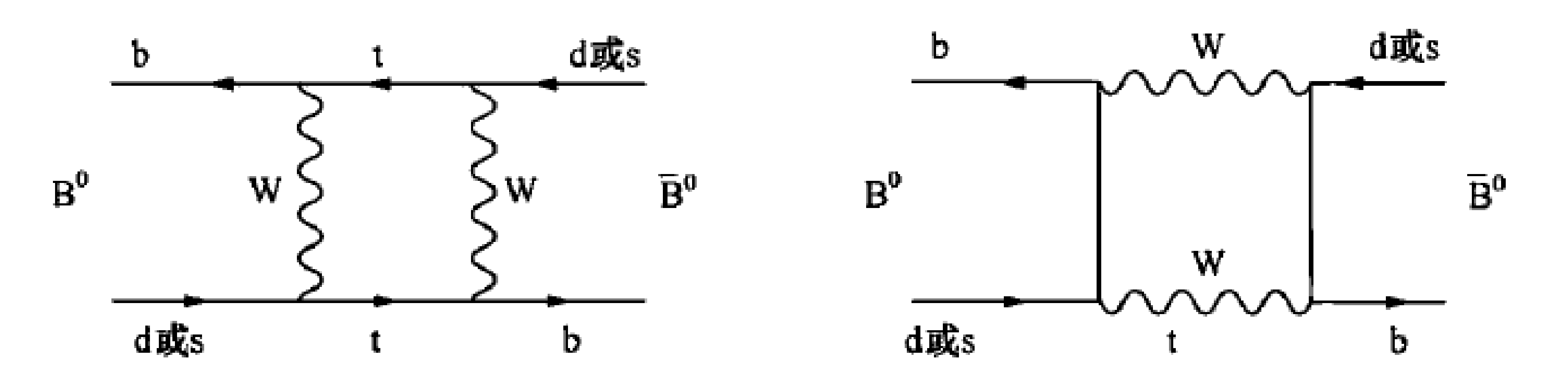


图 6.3　$\Delta B=2$ 过程的费曼图

$$M_{12}=\left(\frac{G_F}{4\pi}\right)^2\xi_{tq}^2m_W^2E\left(\frac{m_t^2(\mu)}{m_W^2}\right)\eta_t^B(\mu)\langle B^0|(\overline{q}b)_{V-A}(\overline{q}b)_{V-A}|\overline{B}^0\rangle_{(\mu)}. \quad (6.25)$$

其中 η_t^B 为能标 μ 下计算的 QCD 辐射修正参数,函数 E 为

$$E(x)=\frac{4x-11x^2+x^3}{4(1-x)^2}-\frac{3x^3\ln x}{2(1-x)^3}, \quad (6.26)$$

而

$$x=\frac{m_t^2(\mu)}{m_W^2},$$

ξ_{tq}定义为

$$\xi_{tq}=V_{tb}V_{tq}^*,\quad q=d\text{ 或 }s. \quad (6.27)$$

我们并不知道如何计算(6.25)式中四夸克算符的矩阵元,通常采用下面的表达式

$$\langle B^0|(\overline{q}b)_{V-A}(\overline{q}b)_{V-A}|\overline{B}^0\rangle_{(\mu)}=-\frac{4}{3}B_B(\mu)f_B^2(\mu)m_B \quad (6.28)$$

来描述．其中，如果 $B_B(\mu)=1$，则称为真空饱和(vacuum saturation)近似，即在两个双线性夸克算符之间只插入真空态．当然实际情况下 $B_B(\mu)\neq 1$.

物理量不应依赖重整化的能标 μ，也不应依赖重整化方案的选取，因此我们重新定义 B_B——消去重整化标度和方案依赖的 B_B，即把 M_{12} 改写成

$$M_{12}=-\frac{G_F^2 m_W^2}{12\pi^2}\xi_{tq}^2 E(x_t)\eta_t^B f_B^2 m_B B_B, \tag{6.29}$$

其中

$$x_t=\frac{m_t^2}{m_W^2}. \tag{6.30}$$

类似地，有

$$\Gamma_{12}\approx-\frac{G_F^2 m_B^3}{8\pi}B_B f_B^2[\xi_{cq}^2 P(cc)+\xi_{uq}^2 P(uu)+2\xi_{uq}\xi_{cq}P(uc)], \tag{6.31}$$

其中函数

$$P(uu)\approx 1,\quad P(uc)\approx 1-\frac{4}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2},\quad P(cc)\approx 1-\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}. \tag{6.32}$$

由此得

$$\Gamma_{12}\approx-\frac{G_F^2 m_B^3}{8\pi}B_B f_B^2\left[(\xi_{uq}+\xi_{cq})^2-\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}\xi_{cq}(\xi_{uq}+\xi_{cq})\right]. \tag{6.33}$$

利用 CKM 矩阵幺正性，有

$$\xi_{uq}+\xi_{cq}=-\xi_{tq}, \tag{6.34}$$

(6.33)式可简化为

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}&\approx-\frac{G_F^2 m_B^3}{8\pi}(B_B f_B^2)\left[(\xi_{tq})^2+\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}\xi_{cq}\xi_{tq}\right]\\&=-\frac{G_F^2 m_B^3}{8\pi}f_B^2 B_B\xi_{tq}^2\left(1+\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}\frac{\xi_{cq}}{\xi_{tq}}\right).\end{aligned} \tag{6.35}$$

由(6.29)，(6.35)式，得

$$\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}=\frac{3\pi}{4}\frac{m_B^2}{m_W^2}\frac{1+\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}\frac{\xi_{cq}}{\xi_{tq}}}{\eta_t^B E(x_t)}, \tag{6.36}$$

其中

$$\frac{\xi_{cq}}{\xi_{tq}}=\frac{V_{cb}V_{cq}^*}{V_{tb}V_{tq}^*}=\begin{cases}\dfrac{V_{cb}V_{cd}^*}{V_{tb}V_{td}^*}\approx\dfrac{-1}{1-\rho+i\eta},\text{当 } q=d,\\ \dfrac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{tb}V_{ts}^*}\approx-1,\text{当 } q=s.\end{cases}\tag{6.37}$$

(6.37)式用了 Wolfenstein CKM 矩阵表示[见(3.63)式],且略去了 $O(\lambda^4)$ 项．在(6.36)式中还有

$$x_t=m_t^2/m_W^2=\left(\frac{172\text{GeV}}{80.4\text{GeV}}\right)^2\approx4.58,\qquad E(x_t)\approx2.51,\quad \eta_t^B\approx0.55.\tag{6.38}$$

将(6.38)式中的值代入(6.36)式,得

$$\left|\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right|\approx\left|\frac{3\pi}{4}\frac{m_B^2}{m_W^2}\frac{1+\frac{8}{3}\left(\frac{1.3}{4.2}\right)^2\frac{V_{cb}V_{cq}^*}{V_{tb}V_{tq}^*}}{0.55\times2.51}\right|\approx5.4\times10^{-3},\tag{6.39}$$

即

$$\left|\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right|\ll1.$$

利用(6.39)式,很容易由(6.24)式算出 Δm 和 $\Delta\Gamma$. 实际上将(6.24)第二式

$$\Delta\Gamma=\frac{4\text{Re}(M_{12}^*\Gamma_{12})}{\Delta m}$$

代入第一式并略去 $|\Gamma_{12}|$ 项,即得

$$(\Delta m)^4-4|M_{12}|^2(\Delta m)^2-4[\text{Re}(M_{12}^*\Gamma_{12})]^2=0,$$

由此得

$$(\Delta m)^2\approx4|M_{12}|^2,$$

或

$$\Delta m\approx2|M_{12}|,\qquad \Delta\Gamma\approx\frac{2\text{Re}(M_{12}^*\Gamma_{12})}{|M_{12}|}.\tag{6.40}$$

按(6.22)式中的定义,$\Delta m>0$,$\Delta\Gamma$ 的符号应由实验定出．

混合参数

$$x_d=\frac{(\Delta m)_{B_d}}{\Gamma_{B_d}}\approx\frac{2|M_{12}|}{\Gamma_{B_d}}=\frac{G_F^2m_W^2|E(x_t)|\eta_t^B f_B^2m_BB_{B_d}|\xi_{td}^2|}{\Gamma_{B_d}\cdot6\pi^2},\tag{6.41}$$

易知

$$x_d \approx 1.3\left(\frac{f_B}{0.2\text{GeV}}\right)^2 B_{B_d} A^2[(1-\rho)^2+\eta^2], \tag{6.42}$$

其中 A, ρ, η 为 CKM 矩阵 Wolfenstein 表示的参数. 将目前实验测得的[8]

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)=0.132, \\ \bar{\eta} &= \eta\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)=0.341, \\ A &= 0.808 \end{aligned} \tag{6.43}$$

代入(6.42)式,可计算出

$$x_d \approx 0.738 B_{B_d}\left(\frac{f_B}{0.2\text{GeV}}\right)^2. \tag{6.44}$$

(6.44)式显然可以和(6.18)式中的实验结果一致.

在 1987 年 ARGUS 发现 B_d-$\overline{B}_d$ 大的混合之前,国际上公认顶夸克质量$\lesssim$30 GeV. 这样由(6.26)式算出的 $E(x)$将比 $m_t=172$ GeV 时小一个量级,因而 x_d 比(6.44)式的结果小一个量级. 由此可以得到,标准模型预言的 B_d-$\overline{B}_d$ 混合很小. ARGUS 组的测量到大的 B_d-$\overline{B}_d$ 混合的实验结果启发人们要去找更大质量的顶夸克. 最早从 ARGUS 实验结果预言大的顶夸克质量的两篇文章见参考文献[9]. 对 B_s-$\overline{B}_s$混合参数 x_s,

$$x_s=\frac{(\Delta m)_{B_s}}{\Gamma_{B_s}} \approx \frac{2|M_{12}|_{B_s}}{\Gamma_{B_s}}=\frac{G_F^2 m_W^2 m_{B_s} E(x_t) \eta_t^B f_{B_s} B_{B_s} |\xi_{ts}^2|}{6\pi^2 \Gamma_{B_s}}, \tag{6.45}$$

$$|\xi_{ts}^2|=|V_{tb}V_{ts}^*|^2 \approx A\lambda^4, \tau_{B_s} \approx 1.472\times 10^{-12}\text{s}, \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned} x_s &\approx 16.5\left(\frac{f_{B_s}}{0.2\text{ GeV}}\right)^2 B_{B_s}, \\ \frac{x_s}{x_d} &\approx 22\left(\frac{f_{B_s}}{f_{B_d}}\right)^2 \frac{B_{B_s}}{B_{B_d}}. \end{aligned} \tag{6.47}$$

当前实验测得的结果为[5]

$$x_s=24.69\pm 0.29.$$

§ 6.4　B 介子工厂

所谓 B 介子工厂是指能产生大量 B-$\overline{B}$ 对的 e^+e^- 对撞机. 因 $m_{B_d}=5.2795$ GeV, $2m_B=10.5590$ GeV, $m(\Upsilon(4S))=10.5794$ GeV, 所以 $\Upsilon(4S)$几乎百分之百衰

变为 $B\bar{B}$.(其中 B^+B^- 和 $B_d^0\bar{B}_d^0$ 产额几乎相等)因此,要想产生大量的 $B\bar{B}$,就要用 e^+e^- 对撞机产生 $\Upsilon(4S)$.

美国康奈尔大学 e^+e^- 对撞机(CESR)是对称B工厂,即 e^+,e^- 束能量相同,且调整为 $E_{e^+}+E_{e^-}=m(\Upsilon(4S))$,产生的 $\Upsilon(4S)$ 在实验室几乎静止,因此衰变出的B和 $\bar{B}$ 背对背飞行.但在实验室中B和 $\bar{B}$ 飞行速度太小而无法测量其衰变长度,因而也无法知道B和 $\bar{B}$ 产生后何时衰变,因此无法测与 $B(\bar{B})$ 衰变时间相关的物理量.

为了测量 $B(\bar{B})$ 的衰变时间(衰变长度),日本和美国几乎同时建成了非对称束流的 e^+e^- 对撞机——B介子工厂.

美国在斯坦福直线加速器中心建成了 9 GeV e^- +3.1 GeV e^+ 的对撞机 PEP Ⅱ,产生的 $\Upsilon(4S)$ 飞行的 $\beta\gamma=0.56$,产生的 $B\bar{B}$ 衰变顶点之间的距离可达 260 μm. 这样,用硅条顶点探测器完全可以测出 B(或 $\bar{B}$)从产生点到衰变顶点之间的距离(时间),因而可以测量时间相关的物理观测量,这正是非对称束流B工厂的优点. PEP Ⅱ 瞬时峰值亮度可达 $1.2\times10^{34}\,cm^{-2}s^{-1}$.

日本在东京附近的 KEK 国家实验室建造了另一个非对称束流的B工厂 KEK-B,是 8 GeV e^- +3.5 GeV e^+,质心能量也是聚焦在 $\Upsilon(4S)$,$\beta\gamma=0.43$,B和 $\bar{B}$ 衰变顶点之间的距离为 200 μm,瞬时亮度为 $1.7\times10^{34}\,cm^{-2}s^{-1}$. 有关B工厂设计的情况可参考[10].

两个B工厂都在 2007 年 3 月开始取数据. PEP-Ⅱ上的探测器为 BaBar[11],KEK-B上的探测器为 Belle[12],都是大型综合探测器.它们的设计相似,性能也相似,都具有很好的衰变顶点的测定精度,对强子有很好的标定效率.

每个B工厂一年都可产生大约 10^8 个 $B\bar{B}$ 对,对研究B物理提供了大量的数据. B的衰变又可产生大量D介子,因此粲物理也是B工厂的实验目标之一. 详细情况可参阅文献[10-12]

§6.5 B介子三类 CP 破坏过程举例

在 4.5.3 节我们指出了三类不同的 CP 破坏,本节将对B介子具体情况举例说明.

中性B介子与中性K介子有很大的区别. K^0-$\bar{K}^0$ 系统由于 K_S,K_L 寿命相差近 500 倍,因而实验上可以制造出纯 K_L 束流,用于研究 CP 不守恒. 实际上 $K_L\to\pi\pi$ 过程 CP 破坏的发现正是利用了 K_L 束流. 但 B^0-$\bar{B}^0$ 系统完全是另一回事了. 由于B介子质量 $m_B\approx5$ GeV,B^0,$\bar{B}^0$ 的衰变道很多,使 B_H,B_L 两个质量本征态的寿命(衰变宽度)相近,因此实验上无法分离出长寿命的B介子束流. 用 ϵ_B 来描写B介子 CP 破坏就没有 K^0-$\bar{K}^0$ 系统用 ϵ_K 来得方便了. 所以我们对B介子(重介子)

系统采用 CP 不对称这个物理量描写 CP 破坏更方便．以下三类过程都用 CP 不对称性来讨论．

6.5.1 直接 CP 破坏

按(4.97)式的定义，我们来研究一下 $B_d \to \pi^+\pi^-$ 衰变．该过程相应的夸克图如图 6.4所示．

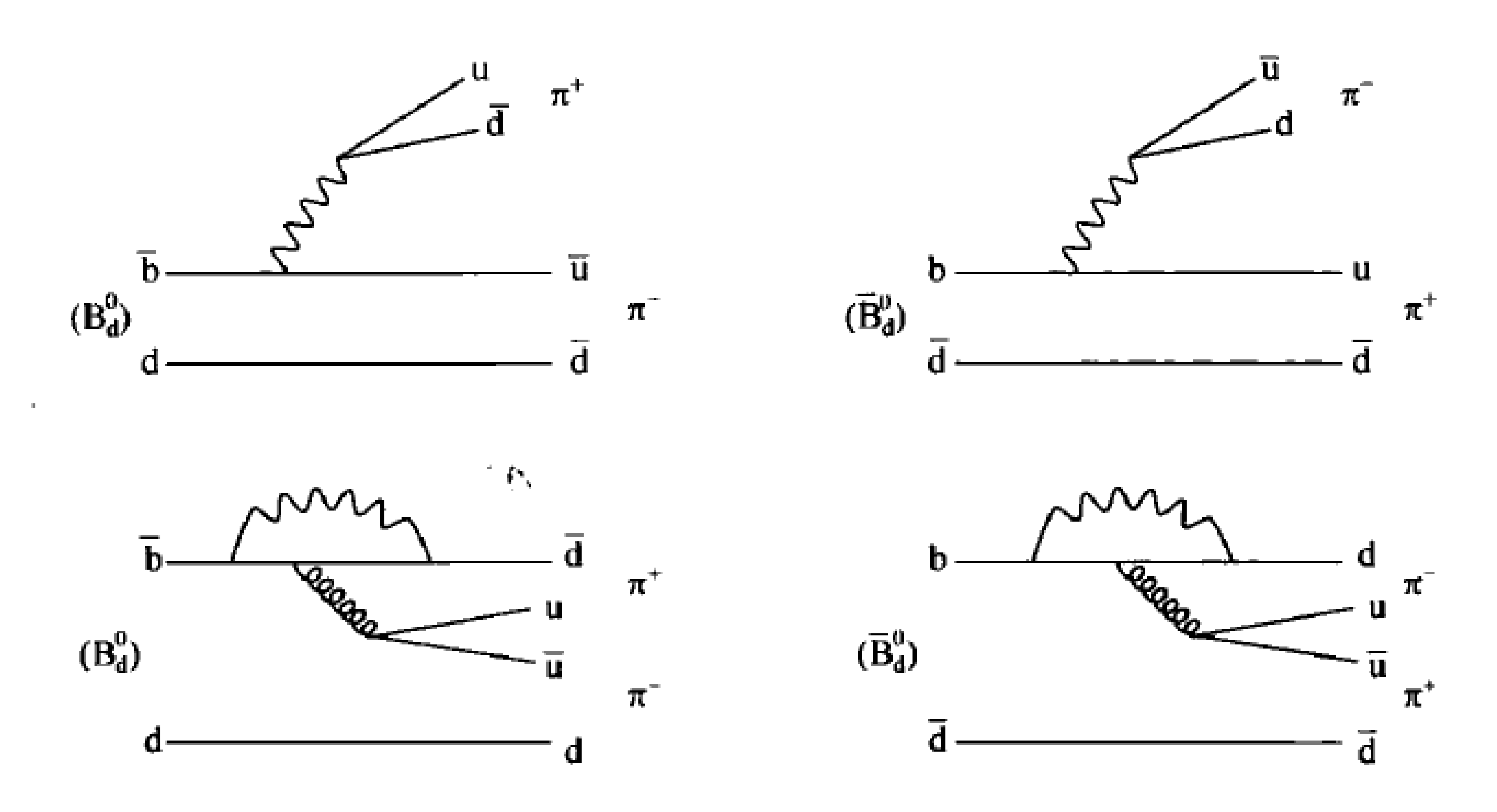


图 6.4 $B_d^0(\overline{B}_d^0)\to\pi^+\pi^-$ 的树图和企鹅图

$\pi^+\pi^-$ 态处于 s 波时 CP 宇称为正．$\pi^+\pi^-$ 总波函数为对称态要求其总同位旋只能为 0 和 2. 图 6.4 中的企鹅图只对 $I=0$ 的末态有贡献.显然企鹅图的 CKM 位相与树图不同，因此我们可以把衰变振幅写为：

$$
\begin{aligned}
A(B_d^0\to\pi^+\pi^-)&=A_0e^{i\delta_0}+A_2e^{i\delta_2},\\
\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)&=A_0^*e^{i\delta_0}+A_2^*e^{i\delta_2},
\end{aligned}
\tag{6.48}
$$

其中第二式是假定 CPT 不变条件下由(5.23)和(5.24)式推出的.

CP 不对称性参数可由(6.48)式算出：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_{CP}(\pi^+\pi^-)&=\frac{|A(B_d^0\to\pi^+\pi^-)|^2-|\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)|^2}{|A(B_d^0\to\pi^+\pi^-)|^2+|\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)|^2}\\
&=\frac{2\mathrm{Im}(A_0^*A_2)\sin(\delta_2-\delta_0)}{|A_0|^2+|A_2|^2+2\mathrm{Re}(A_0^*A_2)\cos(\delta_2-\delta_0)}.
\end{aligned}
\tag{6.49}
$$

由(6.49)式可看出，$\mathscr{A}_{CP}$ 不为零的条件是 $\delta_2\neq\delta_0$，A_0 和 A_2 的弱位相不相等．这两个条件都是满足的，所以(6.49)给出的直接 CP 破坏的确存在．目前的最新实验结果为[13]

$$
\mathscr{A}_{CP}(\pi^+\pi^-)=0.38\pm0.06.
$$

须指出，图 6.4 的企鹅图中的胶子线用 Z^0，γ 代替则称为弱电企鹅图，用 P^{EW} 表示．而胶子线的企鹅图称为 QCD 企鹅图，简单地用 P 表示．一般情况下

$$|P^{EW}/P| \ll 1.$$

现在来看另一过程，即带电 B 介子到 πK 的衰变．

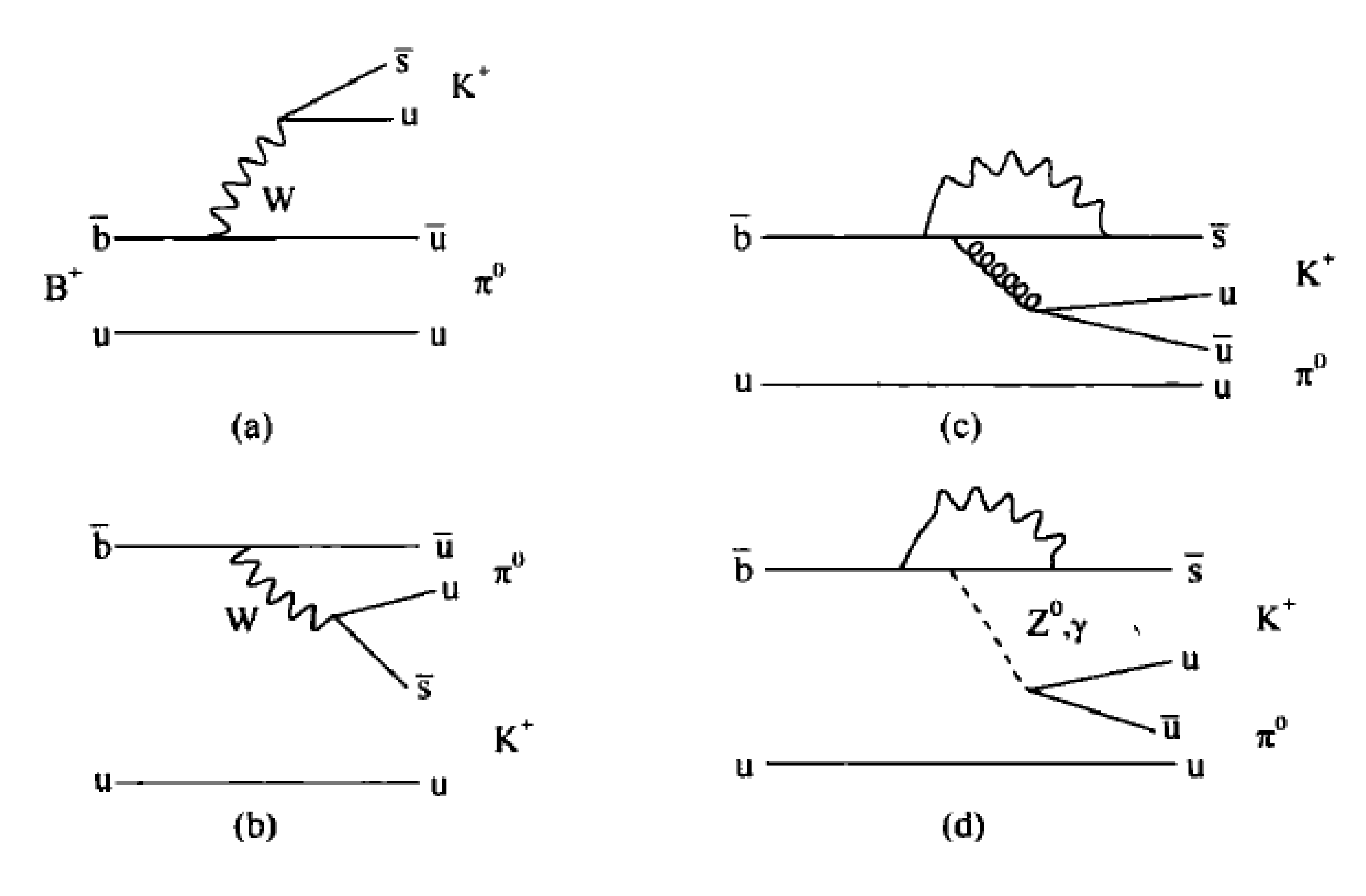


图 6.5　$B^+ \to \pi^0 K^+$ 的夸克图

图 6.5 给出了 $B^+ \to \pi^0 K^+$ 的夸克图．我们标出了弱电企鹅图(d)，$B^- \to \pi^0 K^-$ 的图没画出．总振幅

$$A = T + C + P + P^{EW}, \tag{6.50}$$

其中图(a)的贡献用 T 表示，是树图的贡献；C 代表色压低的树图的贡献；P 代表 QCD 企鹅图的贡献；P^{EW} 是弱电企鹅图的贡献．实验测得的 CP 不对称性[13]

$$\mathcal{A}_{CP}(B^+ \to \pi^0 K^+) = 0.050 \pm 0.025.$$

与这个过程有关的一些疑难问题，我们将在 § 6.9 中再讨论．

6.5.2　由混合诱导的 *CP* 破坏(间接 *CP* 破坏)

(4.99)式同号轻子末态的不对称性是这类过程的典型代表．实际上在标准模型下，$B^0 \to l^+ X$，$\overline{B}{}^0 \to l^- X$，而 $B^0 \nrightarrow l^- X$，$\overline{B}{}^0 \nrightarrow l^+ X$．所以如果没有混合，$B^0 \overline{B}{}^0$ 只能有 $l^+ l^-$ 末态，而不能有 $l^+ l^+$，$l^- l^-$ 末态，即只有

$$\Upsilon(4S) \to B^0 \overline{B}{}^0 \to l^+ l^- X.$$

但有混合时，则可以有

$B^0\ \overline{B}{}^0$：$\overline{B}{}^0 \to B^0 \to l^+ X$，$B^0 \to l^+ X$　　　　$B^0\ \overline{B}{}^0$：$\overline{B}{}^0 \to l^- X$，$B^0 \to \overline{B}{}^0 \to l^- X$

由(4.83)～(4.85)式，可得

$$A(\mathrm{B}^0(t)\to \mathrm{l}^+\mathrm{X})=\langle \mathrm{l}^+\mathrm{X}|H_w|\mathrm{B}^0(t)\rangle$$
$$=\langle \mathrm{l}^-\mathrm{X}|H_w\left(g_+(t)|\mathrm{B}^0\rangle+\frac{q}{p}g_-(t)|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle\right)$$
$$=g_+(t)\langle \mathrm{l}^+\mathrm{X}|H_w|\mathrm{B}^0\rangle, \tag{6.51}$$

$$A(\mathrm{B}^0(t)\to \mathrm{l}^-\mathrm{X})=\frac{q}{p}g_-(t)\langle \mathrm{l}^-\mathrm{X}|H_w|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle, \tag{6.52}$$

$$A(\overline{\mathrm{B}}^0(t)\to \mathrm{l}^+\mathrm{X})=\frac{p}{q}g_-(t)\langle \mathrm{l}^+\mathrm{X}|H_w|\mathrm{B}^0\rangle, \tag{6.53}$$

$$A(\overline{\mathrm{B}}^0(t)\to \mathrm{l}^-\mathrm{X})=g_+(t)\langle \mathrm{l}^-\mathrm{X}|H_w|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle. \tag{6.54}$$

假定 $t=0$ 时刻用 $\mathrm{l}^+\mathrm{X}$ 标定了 B^0，则 $\Upsilon(4S)\to\mathrm{B}^0\overline{\mathrm{B}}^0$ 的另一端定为 $\overline{\mathrm{B}}^0(t=0)$. 如果另一端也在 t 时刻测得 l^+，实际上我们就有了 $\mathrm{l}^+\mathrm{l}^+$ 事例，即

$$\begin{array}{l}\Upsilon(4S)\longrightarrow \mathrm{B}^0\ \overline{\mathrm{B}}^0\\ \qquad\qquad\qquad\quad \llcorner\!\!\longrightarrow \mathrm{l}^+\ \mathrm{X}(t\ \text{时刻})\\ \qquad\qquad\quad \llcorner\!\!\longrightarrow \mathrm{l}^+\ \mathrm{X}(t=0)\end{array}$$

显然，$\overline{\mathrm{B}}^0(t)\to\mathrm{l}^+\mathrm{X}$ 只能通过混合才能实现，所以以上这个 $\mathrm{l}^+\mathrm{l}^+$ 事例的几率正比于 $|A(\mathrm{B}^0(t)\to\mathrm{l}^+\mathrm{X})|^2$. 容易理解，$\mathrm{l}^-\mathrm{l}^-$，事例的几率正比于 $|A(\mathrm{B}^0(t)\to\mathrm{l}^-\mathrm{X})|^2$. 所以有

$$a(t)=\frac{N^{--}-N^{++}}{N^{--}+N^{++}}=\frac{|A(\mathrm{B}^0(t)\to\mathrm{l}^-\mathrm{X})|^2-|A(\overline{\mathrm{B}}^0(t)\to\mathrm{l}^+\mathrm{X})|^2}{|A(\overline{\mathrm{B}}^0(t)\to\mathrm{l}^-\mathrm{X})|^2+|A(\overline{\mathrm{B}}^0(t)\to\mathrm{l}^+\mathrm{X})|^2}. \tag{6.55}$$

将(6.52)和(6.53)式代入上式，得

$$a(t)=\frac{\left|\frac{q}{p}\right|^2|\langle\mathrm{l}^-\mathrm{X}|H_w|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle|^2-\left|\frac{p}{q}\right|^2|\langle\mathrm{l}^+\mathrm{X}|H_w|\mathrm{B}^0\rangle|^2}{\left|\frac{q}{p}\right|^2|\langle\mathrm{l}^-\mathrm{X}|H_w|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle|^2+\left|\frac{p}{q}\right|^2|\langle\mathrm{l}^+\mathrm{X}|H_w|\mathrm{B}^0\rangle|^2}. \tag{6.56}$$

由(4.16)式，反幺正算符 CPT 变换将 $\langle\mathrm{l}^-\mathrm{X}|\mathrm{H}_w|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle$ 和 $\langle\mathrm{l}^+\mathrm{X}|\mathrm{H}_w|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle$ 联系起来，即

$$\langle\mathrm{l}^+\mathrm{X}|H_w|\mathrm{B}^0\rangle=\langle(\mathrm{l}^+\mathrm{X})_{CPT}|(H_w)_{CPT}|(\mathrm{B}^0)_{CPT}\rangle^*, \tag{6.57}$$

其中

$$\langle(\mathrm{l}^+\mathrm{X})_{CPT}|=(CPT|\mathrm{l}^+\mathrm{X};\mathrm{out}\rangle)^+=\langle\mathrm{l}^-\mathrm{X};\mathrm{in}|,$$
$$|\mathrm{B}^0\rangle_{CPT}=CPT|\mathrm{B}^0\rangle=|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle.$$

假定理论是 CPT 不变的，则 $(H_w)_{CPT}=CPTH_w(CPT)^{-1}=H_w$，(6.57)式变为

$$\langle\mathrm{l}^+\mathrm{X}|H_w|\mathrm{B}^0\rangle=\langle\mathrm{l}^+\mathrm{X};\mathrm{out}|H_w|\mathrm{B}^0\rangle$$
$$=\langle\mathrm{l}^-\mathrm{X};\mathrm{in}|H_w|\overline{\mathrm{B}}^0\rangle^*$$

$$= \sum_n \langle l^- X;in \mid n;out\rangle^* \langle n;out \mid H_w \mid \overline{B}^0\rangle^*$$

$$= \langle l^- X;in|l^- X;out\rangle^* \langle l^- X;out|H_w|\overline{B}^0\rangle^*. \tag{6.58}$$

$\langle l^- X;out|l^- X;in\rangle$只提供一个相因子，所以(6.58)式给出

$$|\langle l^- X|H_w|\overline{B}^0\rangle| = |\langle l^+ X|H_w|B^0\rangle|. \tag{6.59}$$

将(6.59)式代入(6.56)式，给出

$$a(t) = \frac{|q/p|^2 - |p/q|^2}{|q/p|^2 + |p/q|^2} = \frac{1-|p/q|^4}{1+|p/q|^4}, \tag{6.60}$$

即 $a(t)$与时间无关．因此，时间积分的同号轻子不对称性也由(6.60)式表示．

(6.60)式也可由(6.16)式代入(6.19)式导出，其条件也是假定 CPT 不变性成立．

现在来计算(6.60)式中 $a(t)$的大小．由(4.76)式和(4.79)式，有

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{2M_{12}^* - i\Gamma_{12}^*}{2M_{12} - i\Gamma_{12}}} = \sqrt{\frac{M_{12}^*\left(1-\frac{i}{2}\frac{\Gamma_{12}^*}{M_{12}^*}\right)}{M_{12}\left(1-\frac{i}{2}\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)}}.$$

由(6.39)式知$|\Gamma_{12}/M_{12}|\ll 1$，因此有

$$\begin{aligned}\left|\frac{q}{p}\right| &= \left|\frac{\left(1-\frac{i}{2}\frac{\Gamma_{12}^*}{M_{12}^*}\right)}{\left(1-\frac{i}{2}\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)}\right|^{1/2} \approx \left|\left(1-\frac{i}{2}\frac{\Gamma_{12}^*}{M_{12}^*}\right)\left(1+\frac{i}{2}\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)\right|^{1/2} \\ &\approx \left|1+\frac{i}{2}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}-\frac{\Gamma_{12}^*}{M_{12}^*}\right)\right|^{1/2} = \left|1+\frac{i}{2}\cdot 2i\,\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)\right|^{1/2} \\ &= \left|1-\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)\right|^{1/2} \approx 1-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right).\end{aligned} \tag{6.61}$$

由(6.36)式，并在(6.37)式中取 q=d，即对于 B_d^0-$\overline{B}_d^0$ 系统，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right) &= \frac{3\pi}{4}\frac{m_{B_d}^2}{m_W^2}\frac{\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}\frac{\eta}{(1-\rho)^2+\eta^2}}{\eta_t^B E(x_t)} \\ &\approx 7.2\times 10^{-4},\end{aligned} \tag{6.62}$$

因而

$$\left|\frac{q}{p}\right| = 1-3.6\times 10^{-4}, \tag{6.63}$$

由式(6.60)可知，此时

$$a(t)_{B_d} = \frac{1-|p/q|^4}{1+|p/q|^4} \approx -7.2\times 10^{-4}. \tag{6.64}$$

对于B_s系统，如果CKM矩阵只取准至λ^3的表示(3.63)式，如(6.37)式所示，则有$\mathrm{Im}(\Gamma_{12}/M_{12})=0$. 若取至$\lambda^5$准确度，则有

$$\frac{\xi_{cs}}{\xi_{ts}}=\frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{tb}V_{ts}^*}\approx\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\right)\left(-1-\frac{1}{2}\lambda^2+\rho\lambda^2-\mathrm{i}\lambda^2\eta\right)$$
$$\approx-1+(\rho-\mathrm{i}\eta)\lambda^2.$$

这样

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\xi_{cs}}{\xi_{ts}}\right)\approx-\eta\lambda^2, \tag{6.65}$$

$$\mathrm{Im}(\Gamma_{12}/M_{12})_{B_s}\approx\frac{3\pi}{4}\frac{m_{B_s}^2}{m_W^2}\frac{\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}(-\eta\lambda^2)}{\eta_t^B E(x_t)}$$
$$\approx-3.3\times10^{-5}, \tag{6.66}$$

$$\left|\frac{q}{p}\right|\approx1+1.65\times10^{-5}, \tag{6.67}$$

$$a(t)_{B_s}\approx3.3\times10^{-5}. \tag{6.68}$$

可见同号轻子对的CP不对称性$a(t)$对B_d,B_s都非常小.

6.5.3　混合型CP破坏

我们先考虑$B_d^0\to\psi K_S$的例子.

取定$CP|K^0\rangle=|\overline{K}^0\rangle$，则有

$$|K_S\rangle=p_K|K^0\rangle+q_K|\overline{K}^0\rangle,$$
$$|K_L\rangle=p_K|K^0\rangle-q_K|\overline{K}^0\rangle. \tag{6.69}$$

由(5.3),(5.18),(6.69)式可有

$$p_K=\frac{1+\overline{\epsilon}}{\sqrt{2(1+|\overline{\epsilon}|^2)}},\quad q_K=\frac{1-\overline{\epsilon}}{\sqrt{2(1+|\overline{\epsilon}|^2)}}, \tag{6.70}$$

其中$|\overline{\epsilon}|\sim10^{-3}\ll1$. 若略去$\overline{\epsilon}$，则有$|K_S\rangle=|K_1^0\rangle$，$|K_L\rangle=|K_2^0\rangle$都是$CP$本征态. 实际上在讨论B介子$CP$破坏时，完全可以忽略掉K介子系统的$CP$破坏.

图6.6是$B_d^0\to\psi K_S$的夸克图. 从图上可看出，B_d^0只能到ψK^0，$\overline{B}_d^0$只能到$\psi\overline{K}^0$，计算矩阵元$\langle\psi K_S|H_w|B_d^0\rangle$和$\langle\psi K_S|H_w|\overline{B}_d^0\rangle$时，我们需要左矢(bra)$\langle K_S|$. 在$CP$守恒时，

$$\langle K_S|=(|K_S\rangle)^\dagger. \tag{6.71}$$

但在CP不守恒时，(6.71)式不再成立. 因此时若用(6.71)式，则

$$\langle K_S|K_L\rangle\neq0. \tag{6.72}$$

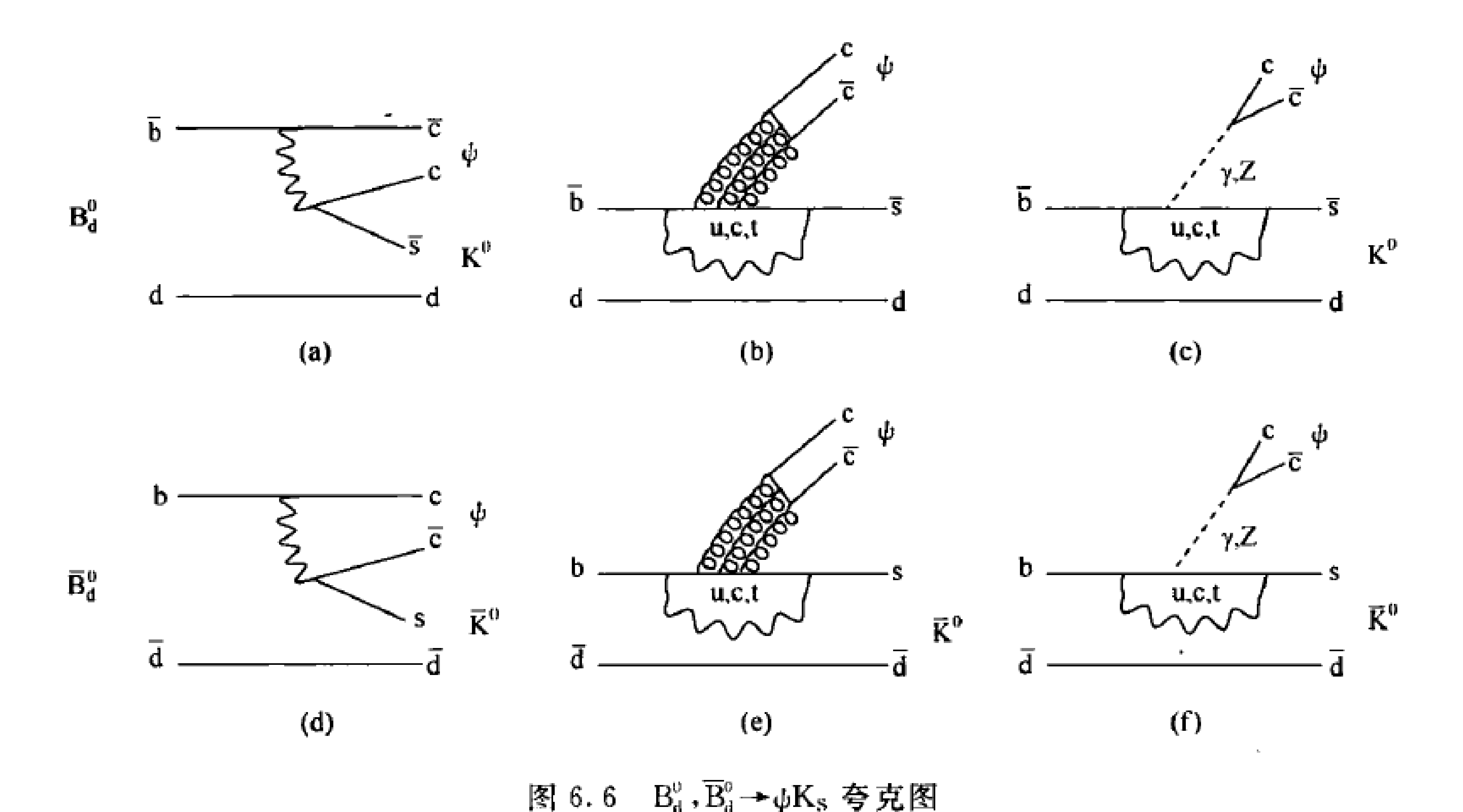


图 6.6 $B_d^0, \overline{B}_d^0 \to \psi K_S$ 夸克图

其中(a)、(d)为树图，(b)、(e)为 QCD 企鹅图，(c)、(f)为弱电企鹅图

此时要用倒易基(reciprocal basis). 用倒易基定义出的左矢(bra)和右矢(ket)的关系为[14]

$$
\begin{aligned}
&\langle \widetilde{K}_L | K_S \rangle = \langle \widetilde{K}_S | K_L \rangle = 0, \\
&\langle \widetilde{K}_L | K_L \rangle = \langle \widetilde{K}_S | K_S \rangle = 1.
\end{aligned}
\tag{6.73}
$$

在假定 CPT 不变的条件下，$|K_S\rangle$，$|K_L\rangle$ 相应的左矢为

$$
\begin{aligned}
&\langle \widetilde{K}_S | = \frac{1}{2p_K}\langle K^0 | + \frac{1}{2q_K}\langle \overline{K}^0 |, \\
&\langle \widetilde{K}_L | = \frac{1}{2p_K}\langle K^0 | - \frac{1}{2q_K}\langle \overline{K}^0 |.
\end{aligned}
\tag{6.74}
$$

注意我们此处定义 $CP|K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle$，这与文献[14]的定义不同，相差负号．利用(6.74)式，并注意到 $B_d^0(\bar{b}d)$ 只能衰变到 $K^0(\bar{s}d)$，$\overline{B}_d^0(b\bar{d})$ 只能衰变到 $\overline{K}^0 = (s\bar{d})$，则有

$$
\begin{aligned}
A(B_d^0 \to \psi K_S) &= \langle \psi K_S | H_w | B_d^0 \rangle \\
&= \frac{1}{2p_K}\langle \psi K^0 | H_w | B_d^0 \rangle, \\
\overline{A}(\overline{B}_d^0 \to \psi K_S) &= \frac{1}{2q_K}\langle \psi \overline{K}^0 | H_w | \overline{B}_d^0 \rangle,
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

$$\frac{\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\psi K_S)}{A(B_d^0\to\psi K_S)}=\frac{p_K}{q_K}\frac{\langle\psi\overline{K}^0|H_w|\overline{B}_d^0\rangle}{\langle\psi K^0|H_w|B_d^0\rangle}. \tag{6.76}$$

实际上,对讨论 B_d^0-$\overline{B}_d^0$ 系统的 CP 破坏,如 $B_d^0\to\psi K_S$,K^0-$\overline{K}^0$ 系统的 CP 破坏只有 10^{-3} 量级($|\overline{\epsilon}_K|\sim10^{-3}$). 这样小的修正是可以忽略的,因为我们主要关心$B^0$ 的 CP 破坏. 这样,由(6.70)式,令$|\overline{\epsilon}_K|=0$,则有 $p_K=q_K=\frac{1}{\sqrt{2}}$,即 $p_K/q_K=1$. 此时

$$\frac{\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\psi K_S)}{A(B_d^0\to\psi K_S)}\approx\frac{\langle\psi\overline{K}^0|H_w|\overline{B}_d^0\rangle}{\langle\psi K^0|H_w|B_d^0\rangle}. \tag{6.77}$$

这样忽略 K^0-$\overline{K}^0$ 系统的 CP 破坏,则$|K_S^0\rangle$为 CP 本征态且本征值为正,即

$$CP|K_S^0\rangle=+|K_S^0\rangle.$$

由于$|\psi\rangle CP$ 本征值也为正,并且 ψK_S 相对角动量为 1,所以

$$CP|\psi K_S\rangle=\eta_{CP}|\psi K_S\rangle,\quad \eta_{CP}=-1. \tag{6.78}$$

下面讨论一个重要的特殊的情况,即若 $A(B_d^0\to\psi K_S)$只涉及一个弱相角 φ_w,则[15]

$$\frac{\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\psi K_S)}{A(B_d^0\to\psi K_S)}=\eta_{CP}\frac{e^{-i\varphi_w}}{e^{i\varphi_w}}=\eta_{CP}e^{-2i\varphi_w}. \tag{6.79}$$

假定 CP 本征态$|f\rangle$有几个不同的强作用本征态$|f,\alpha\rangle$,$\alpha=1,2,\cdots$,但是

$$\begin{aligned}CP|f\rangle&=\eta_{CP}(f)|f\rangle,\\ CP|f,\alpha\rangle&=\eta_{CP}(f)|f,\alpha\rangle,\end{aligned} \tag{6.80}$$

我们定义

$$\begin{aligned}{}_{out}\langle f,\alpha|B_d^0\rangle_{in}&=a_\alpha e^{i\delta_\alpha},\\ {}_{out}\langle f,\alpha|\overline{B}_d^0\rangle_{in}&=\overline{a}_\alpha e^{i\delta_\alpha},\end{aligned} \tag{6.81}$$

其中 δ_α 为强作用位相. 假定 CPT 不变,按(4.16)式有

$$\begin{aligned}{}_{out}\langle f,\alpha|\overline{B}_d^0\rangle_{in}&=[{}_{out}\langle f,\alpha|(CPT)^{-1}\cdot(CPT)|\overline{B}_d^0\rangle_{in}]^*\\ &=\eta_{CP}(f)_{in}\langle f,\alpha\mid B_d^0\rangle_{out}^*=\sum_n{}_{in}\langle f,\alpha\mid n\rangle_{out}^*{}_{out}\langle n\mid B_d^0\rangle_{in}^*\eta_{CP}(f)\\ &=\eta_{CP}(f)_{in}\langle f,\alpha|f,\alpha\rangle_{out}^*{}_{out}\langle f,\alpha|B_d^0\rangle_{in}^*\\ &=\eta_{CP}(f)_{out}\langle f,\alpha|f,\alpha\rangle_{in}a_\alpha^*e^{-i\delta_\alpha}.\end{aligned} \tag{6.82}$$

低能下弹性散射

$$_{\text{out}}\langle f,\alpha | f,\alpha\rangle_{\text{in}} = e^{2i\delta_\alpha},$$

我们在CPT不变下有

$$_{\text{out}}\langle f,\alpha | \overline{B}_d^0\rangle_{\text{in}} = \eta_{CP}(f)a_\alpha^* e^{i\delta_\alpha}. \tag{6.83}$$

比较(6.81)式，有

$$\overline{a}_\alpha = \eta_{CP}(f)a_\alpha^*. \tag{6.84}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\overline{A}(\overline{B}_d^0\to f)}{A(B_d^0\to f)} &= \frac{_{\text{out}}\langle \overline{f} \mid \overline{B}_d^0\rangle_{\text{in}}}{_{\text{out}}\langle f \mid B_d^0\rangle_{\text{in}}} = \frac{\sum_\alpha {}_{\text{out}}\langle f \mid f,\alpha\rangle_{\text{out}\,\text{out}}\langle f,\alpha \mid \overline{B}_d^0\rangle_{\text{in}}}{\sum_\alpha {}_{\text{out}}\langle f \mid f,\alpha\rangle_{\text{out}\,\text{out}}\langle f,\alpha \mid B_d^0\rangle_{\text{in}}} \\ &= \frac{\sum_\alpha {}_{\text{out}}\langle f \mid f,\alpha\rangle_{\text{out}}\,\overline{a}_\alpha e^{i\delta_\alpha}}{\sum_\alpha {}_{\text{out}}\langle f \mid f,\alpha\rangle_{\text{out}}\,a_\alpha e^{i\delta_\alpha}}.\end{aligned} \tag{6.85}$$

由(6.84)式，可得

$$\overline{a}_\alpha = \eta_{CP}(f)|a_\alpha| e^{-i\varphi_w},$$
$$a_\alpha = |a_\alpha| e^{i\varphi_w},$$

代入(6.85)式，有

$$\frac{\overline{A}(\overline{B}_d^0\to f)}{A(B_d^0\to f)} = \eta_{CP}(f)\frac{e^{-i\varphi_w}}{e^{i\varphi_w}}. \tag{6.86}$$

这就证明了(6.79)式.

由图6.6可知，弱电企鹅图的贡献太小，与树图和QCD企鹅图的贡献相比可以忽略. 对$B\to\psi K_S$过程的主要贡献来自树图T和QCD企鹅图P_u,P_c,P_t.

$$\begin{aligned}T(\psi K_S) &= V_{cb}^* V_{cs} t(\psi K_S),\\ P_u(\psi K_S) &= V_{ub}^* V_{us} p_u(\psi K_S),\\ P_c(\psi K_S) &= V_{cb}^* V_{cs} p_c(\psi K_S),\\ P_t(\psi K_S) &= -V_{tb}^* V_{ts} p_t(\psi K_S),\end{aligned} \tag{6.87}$$

其中已将CKM因子分离开. 由CKM矩阵(3.63)，准至λ^3项，$T(\psi K_S)$，$P_c(\psi K_S)$，$P_t(\psi K_S)$的CKM因子相同，只有P_u的CKM因子与它们不同，但

$$\left|\frac{P_u}{T}\right| \approx \lambda^2 \left|\frac{p_u(\psi K_S)}{t(\psi K_S)}\right| \lesssim 1\%, \tag{6.88}$$

这因剔除CKM因子，圈图 p_u 总是比树图 $t(\psi K_S)$ 来得小，所以我们可以把 P_u 的贡献也略去．准至 λ^3 项，由(3.63)式，CKM矩阵因子为实数，且只有一个弱位相 $\varphi_w=0$.

$$A(B\to\psi K_S)\approx T+P_c+P_t. \tag{6.89}$$

由(6.86)式，

$$\frac{\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\psi K_S)}{A(B_d^0\to\psi K_S)}=\eta_{CP}(\psi K_S). \tag{6.90}$$

现在计算 $B_d^0\to\psi K_S$ 过程的 CP 不对称．在略去 K^0-$\overline{K}^0$ 系统的 CP 破坏时，ψK_S 为 CP 本征态且本征值 $\eta_{CP}=(-1)$. CP 不对称为

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{CP}(t)&=\frac{\Gamma(\overline{B}_d^0(t)\to\psi K_S)-\Gamma(B_d^0(t)\to\psi K_S)}{\Gamma(\overline{B}_d^0(t)\to\psi K_S)+\Gamma(B_d^0\to\psi K_S)}\\&=\frac{-(1-|\lambda_f|^2)\cos\Delta mt+2\mathrm{Im}(\lambda_f\sin\Delta mt)}{\left(1+|\lambda_f|^2)\cosh\dfrac{\Delta\Gamma t}{2}+2\mathrm{Re}(\lambda_f\sinh\dfrac{\Delta\Gamma t}{2}\right)},\end{aligned} \tag{6.91}$$

这里 f 为 CP 本征态，$f=\psi K_S$. 注意推出(6.91)式时我们已用了

$$\left|\frac{q}{p}\right|_{B_d^0}=1. \tag{6.92}$$

实际上，由(6.29)式和(6.39)式，可以得到

$$\frac{q}{p}\approx\sqrt{\frac{M_{12}^*}{M_{12}}}=\sqrt{\frac{\xi_{td}^{*2}}{\xi_{td}^2}}=\frac{\xi_{td}^*}{\xi_{td}},$$

其中

$$\xi_{td}=V_{td}V_{td}^*=|V_{td}|e^{i\beta},$$
$$\xi_{td}^*=V_{td}^*V_{td}=|V_{td}|e^{-i\beta},$$

β 角由(3.75)式定义．

$$\frac{q}{p}=\frac{V_{td}^*V_{td}}{V_{td}V_{td}^*}=e^{-2i\beta}, \tag{6.93}$$

与(6.92)式的近似一致．利用(6.90)和(6.93)式，可给出(6.91)式中的 λ_f 为

$$\lambda_{\psi K_S}=\frac{q}{p}\frac{\overline{A}(\overline{B}_d^0\to\psi K_S)}{A(B_d^0\to\psi K_S)}=\eta_{CP}(\psi K_S)e^{-2i\beta}=-e^{-2i\beta}. \tag{6.94}$$

(6.91)式还可进一步简化．实际上由(6.39)和(6.40)式可知 $|\Delta\Gamma|\ll\Delta m$，所以

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}\ll\frac{\Delta m}{\Gamma}\approx 0.7,$$

即

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}\ll 0.7. \tag{6.95}$$

对(6.91)分母作 $\Delta\Gamma\approx 0$ 的近似,得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{CP}(t)&=\frac{2\mathrm{Im}\lambda_f}{1+|\lambda_f|^2}\sin\Delta mt-\frac{1-|\lambda_f|^2}{1+|\lambda_f|^2}\cos\Delta mt\\&=S_f\sin\Delta mt-C_f\cos\Delta mt,\end{aligned}\tag{6.96}$$

$$S_f=\frac{2\mathrm{Im}\lambda_f}{1+|\lambda_f|^2},\ C_f=\frac{1-|\lambda_f|^2}{1+|\lambda_f|^2}\cos\Delta mt.\tag{6.97}$$

显然 $|q/p|=1$ 时,$C_f\propto|\overline{A}_f|^2-|A_f|^2$ 描写直接 CP 破坏,而 S_f 描写干涉引起的 CP 破坏.

$$\mathscr{A}^{\mathrm{int}}\propto\mathrm{Im}\lambda_f$$

为由所谓"混合与衰变的干涉"(interference of mixing and decay)引起的 CP 破坏,即我们定义的混合型 CP 破坏. 对 $B_d^0\to\psi K_S$,由(6.92),(6.94)和(6.96)式得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{CP}(B_d^0\to\psi K_S)&=\mathrm{Im}(-e^{-2i\beta})\sin\Delta mt\\&=\sin 2\beta\sin\Delta mt.\end{aligned}\tag{6.98}$$

显然,实验上测得 $\mathscr{A}_{CP}(B_d^0\to\psi K_S)$ 与时间的关系,则可确定 $\sin 2\beta$. 幺正三角形的 β 角正是这样确定的. 在§6.7节我们还会回到这个问题上来.

§6.6 B介子弱衰变的有效哈密顿量

利用算符乘积展开可以导出B介子 $|\Delta B|=1$ 衰变的有效哈密顿量[16]

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\Big[&\sum_{q=u,c}v_q\Big(c_1(\mu)Q_1^q(\mu)+c_2(\mu)Q_2^q(\mu)+\sum_{k=3}^{10}c_k(\mu)Q_k(\mu)\Big)\\&-v_t\big(c_{7\gamma}(\mu)Q_{7\gamma}(\mu)+c_{8G}(\mu)Q_{8G}(\mu)\big)\Big]+h.c.,\end{aligned}\tag{6.99}$$

其中

$$\begin{cases}v_q=V_{qb}V_{qd}^*, & \text{对 b}\to\text{d 跃迁},\\ v_q=V_{qb}V_{qs}^*, & \text{对 b}\to\text{s 跃迁},\end{cases}\tag{6.100}$$

q代表u或c,$c_i(\mu)$ 是 Wilson 系数,文献中已用微扰论和重整化群方法计算到了

next-to-leading order. (6.99)式中算符 Q_i 的具体表达式如下：

$$
\begin{aligned}
Q_1^u &= (\bar{u}_\alpha b_\alpha)_{V-A}(\bar{q}_\beta u_\beta)_{V-A},\ Q_1^c = (\bar{c}_\alpha b_\alpha)_{V-A}(\bar{q}_\beta c_\beta)_{V-A},\\
Q_2^u &= (\bar{u}_\alpha b_\beta)_{V-A}(\bar{q}_\beta u_\alpha)_{V-A},\ Q_2^c = (\bar{c}_\alpha b_\beta)_{V-A}(\bar{q}_\beta c_\alpha)_{V-A},\\
Q_3 &= (\bar{q}_\alpha b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}(\bar{q}'_\beta q'_\beta)_{V-A},\\
Q_4 &= (\bar{q}_\beta b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}(\bar{q}'_\alpha \bar{q}'_\beta)_{V-A},\\
Q_5 &= (\bar{q}_\alpha b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}(\bar{q}'_\beta q'_\beta)_{V+A},\\
Q_6 &= (\bar{q}_\beta b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}(\bar{q}'_\alpha q'_\beta)_{V+A},\\
Q_7 &= \frac{3}{2}(\bar{q}_\alpha b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}e_{q'}(\bar{q}'_\beta q'_\beta)_{V+A},\\
Q_8 &= \frac{3}{2}(\bar{q}_\beta b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}e_{q'}(\bar{q}'_\alpha q'_\beta)_{V+A},\\
Q_9 &= \frac{3}{2}(\bar{q}_\alpha b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}e_{q'}(\bar{q}'_\beta q'_\beta)_{V-A},\\
Q_{10} &= \frac{3}{2}(\bar{q}_\beta b_\alpha)_{V-A}\sum_{q'}e_{q'}(\bar{q}'_\alpha q'_\beta)_{V-A},\\
Q_{7\gamma} &= \frac{e}{8\pi^2}m_b\,\bar{q}_\alpha\sigma^{\mu\nu}(1+\gamma_5)b_\alpha F_{\mu\nu},\\
Q_{8G} &= \frac{g}{8\pi^2}m_b\,\bar{q}_\alpha\sigma^{\mu\nu}(1+\gamma_5)t^a_{\alpha\beta}b_\beta G^a_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{6.101}
$$

以上 q 代表 d 或 s，$t^a(a=1,\cdots,8)$为 SU(3)群的生成元，Q_1^q，Q_2^q 为树图算符，$Q_3\sim Q_6$ 是 QCD 企鹅算子，$Q_7\sim Q_{10}$为弱电企鹅算子，$Q_{7\gamma}$，Q_{8G}为磁企鹅算子．

有了有效哈密顿量，我们就可以计算 B 介子弱衰变振幅．具体计算方法将在§6.7 介绍．

§6.7　B介子弱衰变振幅的计算

在这一节我们将根据§6.6 中给出的有效哈密顿量来计算 B 介子弱衰变振幅．目前国际上通用的方法主要有五种，分别为朴素因子化方法(naive factorization)，推广的因子化方法(generalized factorization)，QCD 因子化方法(QCD factorization)，微扰 QCD 方法(perturbative QCD)，软共线有效理论(soft-collinear

effective theory). 下面我们将对其分别予以简单的阐述,要应用这些方法的读者须再去参考已有的文献.

6.7.1 朴素因子化方法

朴素因子化方法是 1985 年由 Stech 等人提出的[17],简称 BSW 方法(BSW 是三位作者名字的字头组合).

利用(6.99)式给出的有效哈密顿量,衰变振幅可写为

$$A(B \to \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2) = \frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} \sum_{i,\mathrm{q}} v_{\mathrm{q}} c_i(\mu) \langle \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 | Q_i(\mu) | \mathrm{B} \rangle, \tag{6.102}$$

其中 $c_i(\mu)$是 Wilson 系数,依赖于重整化标度 μ 及重整化方案. 矩阵元$\langle \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 | Q_i(\mu) | \mathrm{B} \rangle$也依赖于重整化标度 μ 及重整化方案. 但两者的乘积却是与重整化标度 μ 及重整化方案无关的.

朴素因子化(BSW)方法假定

$$\langle \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 | Q_i(\mu) | \mathrm{B} \rangle \approx \langle \mathrm{M}_1 | J_1 | 0 \rangle \langle \mathrm{M}_2 | J_2 | \mathrm{B} \rangle, \tag{6.103}$$

其中

$$\langle \mathrm{M}_1 | J_1 | 0 \rangle \propto f_{\mathrm{M}_1},$$

f_{M_1} 为衰变常数,

$$\langle \mathrm{M}_2 | J_2 | \mathrm{B} \rangle \propto \text{形状因子}.$$

衰变常数和介子跃迁形状因子可由实验定出,或由格点(lattice) QCD 或 QCD 求和规则(sum rule)算出. 但是(6.103)式的近似使矩阵元$\langle \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 | Q_i(\mu) | \mathrm{B} \rangle$失去了重整化标度和重整化方案的依赖性,而 $c_i(\mu)$相应的依赖性无法消去,使物理振幅依赖于重整化标度 μ 及重整化方案. 其次,虽然 BSW 方法取得了很大成功,由它算出的大部分衰变分支比在量级上和实验结果一致,但在定量上还有许多问题.

为了解决 BSW 方法的缺欠,人们又提出了推广的因子化方案.

6.7.2 推广的因子化方案

为了把朴素因子化计算的矩阵元$\langle \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 | Q_i(\mu) | \mathrm{B} \rangle \equiv \langle Q_i \rangle$失去的重整化标度 μ 和重整化方案依赖性找回来,对矩阵元计算加上单圈图修正[18]

$$\langle Q_i(\mu) \rangle = \left[I + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \hat{m}_s(\mu) + \frac{\alpha}{4\pi} \hat{m}_e(\mu) \right]_{ij} \langle Q_j^{\mathrm{tree}} \rangle, \tag{6.104}$$

其中$\langle Q_j^{\rm tree}\rangle$是树图算子$Q_j$的矩阵元，$\hat{m}_s(\mu)$，$\hat{m}_e(\mu)$是$10\times10$矩阵，依赖于重整化方案和重整化标度$\mu$，具体表达式见[18]，$Q_i(i=1,2,\cdots,10)$见(6.101)式．由此得

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{M_1M_2}|H_{\rm eff}(\Delta B=1)|\mathrm{B}\rangle\\&=\frac{G_{\rm F}}{\sqrt{2}}\sum_{i,\rm q}v_{\rm q}c_i(\mu)\langle \mathrm{M_1M_2}|Q_i(\mu)|\mathrm{B}\rangle=\frac{G_{\rm F}}{\sqrt{2}}\sum_{\rm q,j}\tilde{c}_j\langle Q_j^{\rm tree}\rangle,\end{aligned}\tag{6.105}$$

其中

$$\tilde{c}_j=\left[I+\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\hat{m}_s(\mu)+\frac{\alpha}{4\pi}\hat{m}_e(\mu)\right]_{ij}c_i(\mu)\tag{6.106}$$

既不依赖重整化方案也不依赖重整化标度，但$\hat{m}_s(\mu)$，$\hat{m}_e(\mu)$中有红外发散．

为了消除矩阵$\hat{m}_s(\mu)$，$\hat{m}_c(\mu)$中的红外发散，需要外线夸克离质壳，即外线夸克动量取$-p^2<0$($p^2=m_{\rm q}^2$称为在壳)，这将产生振幅的规范依赖性，是一个缺点．另外，引入的有效色因子$N_{\rm eff}$也与过程有关而不是普适常数．为此，人们又提出了QCD因子化方案．

6.7.3 QCD因子化方案

Beneke，Buchalla，Neubert和Sachrajda(BBNS)在QCD基础上提出了一种新的因子化方案，称为QCD因子化方案(又称BBNS因子化方案)．他们指出，在重夸克极限($m_b\to\infty$)下，$\mathrm{B\to M_1M_2}$即B介子衰变为两个末态介子$\mathrm{M_1M_2}$的矩阵可写为

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M_1M_2}\mid Q_i\mid \mathrm{B}\rangle=&F^{\mathrm{B\to M_2}}(q^2)\int_0^1\mathrm{d}xT_i^{\rm I}(x)\Phi_{\mathrm{M_1}}(x)\\&+\int_0^1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}yT_i^{\rm II}(\xi,x,y)\Phi_{\rm B}(\xi)\Phi_{\mathrm{M_1}}(x)\Phi_{\mathrm{M_2}}(y)\\&+O(\Lambda_{\rm QCD}/m_b),\end{aligned}\tag{6.107}$$

其中$T_i^{\rm I,II}(x)$是硬散射核，是微扰可计算的．长程效应包含在介子衰变常数、形状因子和介子光锥分布振幅(波函数)$\Phi_{\mathrm{M_1}}$，$\Phi_{\mathrm{M_2}}$，$\Phi_{\rm B}$中．$\mathrm{M_1}$为轻介子或粲偶素，$\mathrm{M_2}$为包含旁观者的介子，可以是任何轻介子或重介子．如果$\mathrm{M_2}$为重介子，则(6.107)式第二行是$1/m_b$压低的．

从(6.107)式可以看出：

(1) α_s零次近似下可回到朴素因子化方案(BSW)；

(2) 高次近似原则上可以逐级计算；

(3) 矩阵元$\langle \mathrm{M_1M_2}|Q_i|\mathrm{B}\rangle$对重整化标度及重整化方案的依赖性得以恢复，并

且在重夸克近似下非因子化贡献可以逐级计算；

(4) 强相角是 $1/m_b$ 或 α_s 压低的；

(5) W 交换和 W 湮没图是 $1/m_b$ 压低的，并且有端点发散，须引入新的唯象参数来去掉发散；

(6) 在 M_1 介子和(BM_2)之间没有长程相互作用(或可忽略)；

(7) 硬散射核 T_i^{I} 包括树图(α_s^0 级)，不可因子化的胶子交换图[见图 6.7(a)，(b)]，企鹅图[图 6.7(e)，(f)]；

(8) 硬散射核 T_i^{II} 只包括 α_s 级的硬旁观者散射[图 6.7(g)，(h)].

具体计算可参阅文献[19].

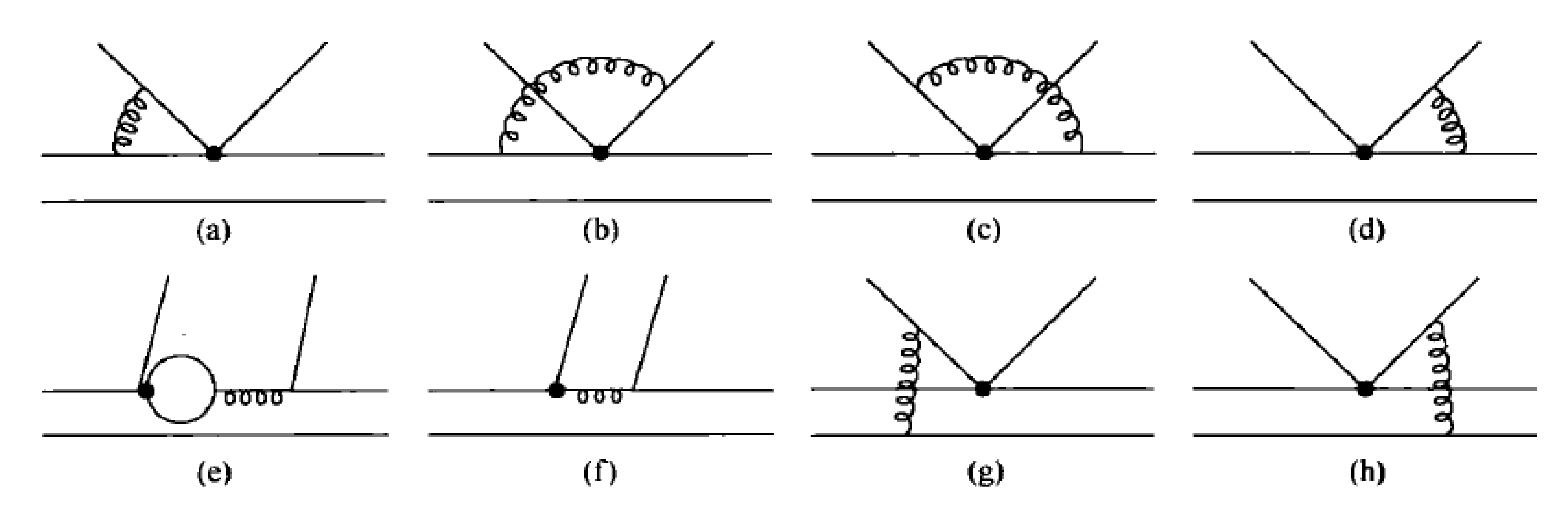


图 6.7　硬散射核 $T_i^{\text{I},\text{II}}$ 的 α_s 级修正

(a)和(b)为顶角修正，(e)和(f)为企鹅修正，(g)和(h)为旁观者散射修正

必须指出的是，由于 b 夸克质量只有 5 GeV 的量级，并不是无穷大，因而忽略$1/m_b$ 的修正在有些情况下是不允许的．例如 B→πK 衰变，正比于 $1/m_b$ 的手征增强修正对振幅的贡献占一半．如果忽略这一手征增强修正，理论计算的分支比只有实验值的 1/4. 但原来的 QCD 因子化框架无法自洽地包含手征增强修正，原因是其涉及的扭曲度为 3(twist-3)的光锥分布振幅的积分在单圈水平上有红外发散，因而破坏了因子化．可以证明，在包含 twist-3 光锥分布振幅后仍有办法消除单圈水平上的红外发散，并可证明单圈水平上因子化仍成立[20]，这就保证了 QCD 框架能自洽地包含手征增强修正，并能正确给出 B→πK 等过程的分支比．这方面一系列的应用可参阅文献[20].

6.7.4　*p*QCD 方案

*p*QCD 方案[21]基于 k_T 因子化方案，计算用微扰 QCD 方法且考虑介子内部夸克的横动量 k_T. 其振幅的计算用 Brodsky-Lepage 公式[22]，且形状因子是微扰可计算的．对于这一点，粒子物理学界有很多争议．由于 Sudakov 压低因子自动出现，因而振幅计算中不出现端点发散(这与 QCD 因子化方案不同)，强位相是微扰可算的，并且主要来自湮没图的贡献．其量级与可因子化的振幅相同，因而是很大的，这样一来可产生大的直接 CP 破坏．

6.7.5 软共线有效理论

软共线有效理论 SCET(soft-collinear effective theory)是重夸克有效理论(HQET)之外的又一个低能有效理论[22]. 其中有效场量是标度比较低的场算符，如共线夸克场、共线胶子场、软夸克场和软胶子场等，而大能标 Q(如在 B 物理中 Q 可取为 b 夸克质量 m_b)以上的动力学自由度全部被积掉，从而被包含到微扰可计算的 Wilson 系数中去.

软共线有效理论的好处是:

(1)低能标和高能标的动力学得以分离. 大能标 Q 以上的贡献又可用微扰 QCD 计算，而低能部分的贡献可以吸收到有效理论算符的矩阵元中.

(2)在对共线场重新定义之后，软自由度和共线自由度可以在非微扰展开的领头阶退耦，这意味着有效算符的矩阵元可以继续因子化为软自由度和共线自由度的非微扰普适参量的乘积或卷积. 这提供了软共线因子化证明的另一条途径.

(3)由于有效理论是很好地定义的，出现在 Wilson 系数中的大对数项可以用重整化群方程来重求和，从而能保证微扰计算的可靠性.

目前人们已经利用 SCET 对 B 介子衰变进行了系统研究，取得了一系列结果，主要有:

(1)精确到 α_s 无穷阶，证明了 $B\to D\pi$ 的因子化;

(2)精确到 α_s 无穷阶，证明了 $B\to X_s\gamma$ 的端点区域因子化;

(3)精确到 α_s 无穷阶，证明了 B→轻介子跃迁形状因子的因子化公式;

(4)利用 SCET 已经把 BBNS 因子化(QCD 因子化)公式中的顶角修正计算到了 NNLO 阶，旁观者硬散射计算到了 NLO 阶，等等.

软共线理论不仅使我们能方便地计算辐射修正，而且也提供了在算符意义上严格的非微扰的幂次展开. SCET 中有效场在 $1/Q$ 展开下有确定的幂次计算，因此可以通过构造与相应过程匹配的高量纲算符来研究因子化公式中的幂次修正. 这对 B 介子衰变很有用，因 b 夸克质量 $m_b\approx 5$ GeV，幂次修正大约以 $\Lambda_{QCD}/m_b\approx 0.07$ 来展开，所以这些修正可能在某些 B 衰变道中显得重要.

详细情况读者可参阅[23]中的文章.

在这一节中我们简要介绍了几种计算 B 介子衰变振幅的方法. 真正使用这些方法还要仔细阅读有关文献.

除介绍的方法外，还有重夸克有效理论、QCD 求和规则、光锥 QCD 求和规则及 NRQCD 等方法，有兴趣的读者可参阅有关文献.

§6.8 幺正三角形的测量

我们只讨论与 B 介子衰变有关的幺正三角形(3.74)式. 相应的三角形如

图 3.1所示．从图上可看出，三个边的长度$|V_{ud}V_{ub}^*|$，$|V_{td}V_{tb}^*|$，$|V_{cd}V_{cb}^*|$可由衰变分支比来测量，而角 α,β,γ 则由测量 CP 不对称的大小来获得．顺便指出，(3.75)式中的角 β,γ 与 CKM 矩阵元 V_{td}，V_{ub}的相角对应，即

$$V_{td}=|V_{td}|e^{-i\beta},V_{ub}=|V_{ub}|e^{-i\gamma}. \tag{6.108}$$

下面我们主要来讨论一下三个角 α,β,γ 的测量．

6.8.1 β角的测量

前面 6.5.3 节已详细讨论了黄金道 $B_d^0\to\psi K_S$ 的时间相关的 CP 不对称性．(6.98)式给出了在相当好的近似下的结果，

$$\mathscr{A}_{CP}(B_d^0\to\psi K_S)\approx\sin2\beta\sin\Delta mt,$$

所以实验上测得 $\mathscr{A}_{CP}$ 就可定出 $\sin2\beta$.

实验上最早测量 $\sin2\beta$ 的是 BaBar 和 Belle 实验组[24]．BaBar 组测量了 $B\to\psi K_S$，$B\to\psi(2S)K_S$，$B\to\psi K_L$ 三个道，并给出了

$$\sin2\beta=0.34\pm0.20, \tag{6.109}$$

而 Belle 组测量了 $B\to\psi K_S$，$\psi(2S)K_S$，$\chi_{c1}K_S$，$\eta_c K_S$，ψK_L，$\psi\pi^0$ 等道，并给出

$$\sin2\beta=0.58^{+0.32}_{-0.34}(\text{stat.})^{+0.09}_{-0.10}(\text{syst.}). \tag{6.110}$$

此后，以上两组又继续进行了更精确的测量．今天世界平均值为[25]

$$\sin2\beta=0.673\pm0.023. \tag{6.111}$$

须指出的是，有了 $\sin2\beta$ 的值，要定 β 角有四种可能：$\sin2\beta>0$ 说明 2β 可能在Ⅰ，Ⅱ象限，每个象限又有两种可能，即 $\beta,\frac{\pi}{2}-\beta$. 因 $\sin(2\pi+2\beta)=\sin2\beta$，所以数学上讲，若 $\beta,\frac{\pi}{2}-\beta$ 是解，则 $\pi+\beta,\pi+\frac{\pi}{2}-\beta$ 也是解．这样，(6.111)式有四个解：

$$\beta,\quad \frac{\pi}{2}-\beta,\quad \pi+\beta,\quad \pi+\frac{\pi}{2}-\beta. \tag{6.112}$$

但从物理上看，2β 在Ⅰ，Ⅱ象限的解小于 180°，即是物理解，而大于 180°的解可以扔掉．这样，如果我们实验上能确定 $\cos2\beta>0$，则 2β 只能在第Ⅰ象限．这就排除了 β 角的不确定性．

关于 $\cos2\beta>0$ 的测量有很多，如 2004 年 BaBar 组用测时间相关和时间积分的 $B\to\psi K\pi$ 角分布分析给出[26]

$$\cos2\beta=2.72^{+0.50}_{-0.79}(\text{stat.})\pm0.27(\text{syst.}). \tag{6.113}$$

2006 年 Belle 实验组又用 $\overline{B}^0$ 衰变到 D^0 介子和轻介子时间相关的 Dalitz 图分析

得到[27]

$$\cos 2\beta = 1.87^{+0.40+0.22}_{-0.53-0.32}. \tag{6.114}$$

当然，后来的 CKM 矩阵元拟合时，考虑到(6.113)和(6.114)式的误差较大，于是将(6.111)式的两个解

$$\beta \approx 23^\circ$$

和

$$\frac{\pi}{2} - \beta \approx 67^\circ$$

都用到拟合中去．下面再讨论这个问题．

6.8.2 α 角的测量

α 角的测量比 β 角复杂，而且也较困难，原因是没有特别干净的过程可以抽取 α 角．下面以 $B \to \pi^+\pi^-, \pi^+\pi^0$ 为例来说明这一情况．

$B \to \pi\pi$ 的夸克图如图 6.8 所示．

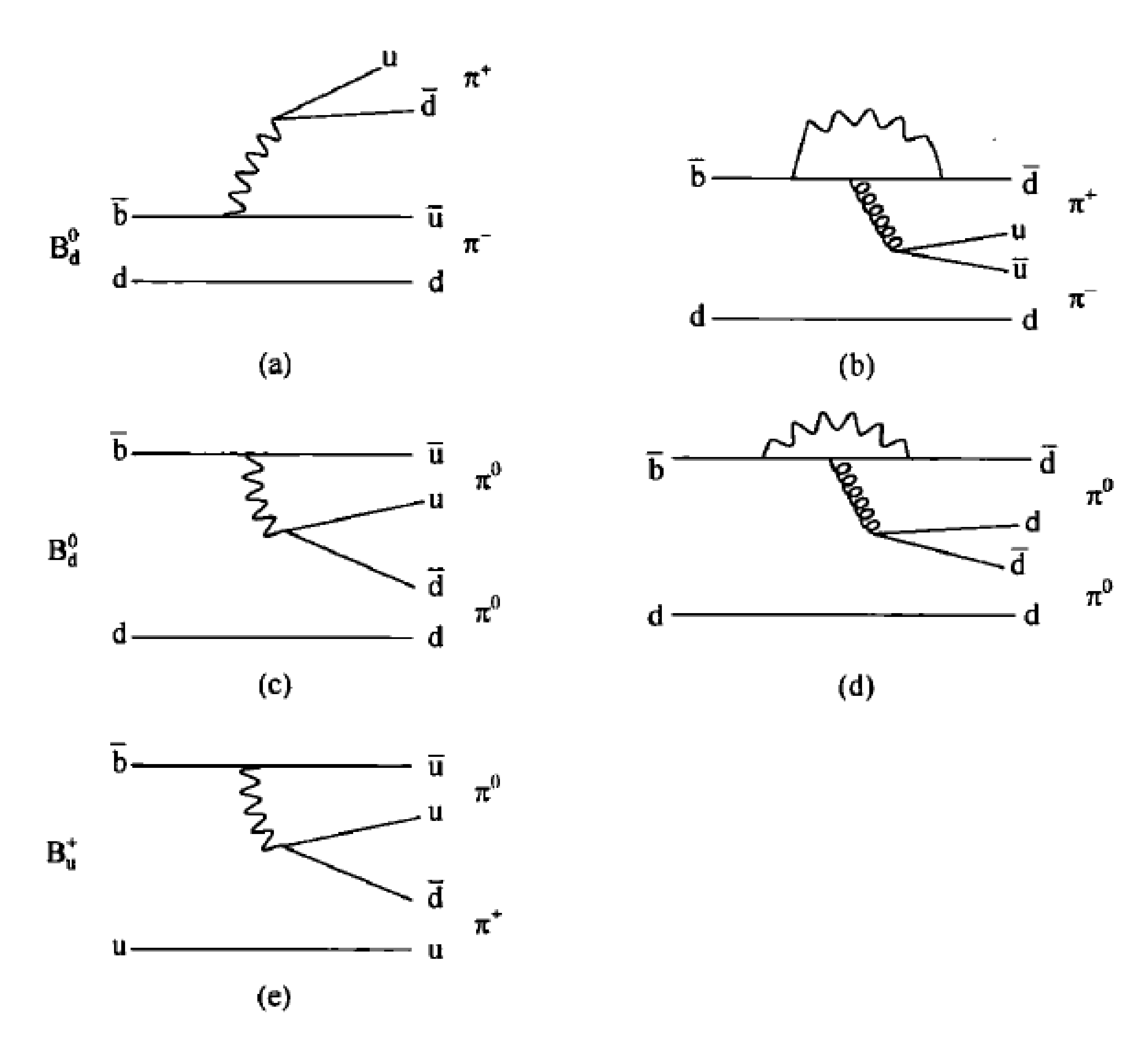


图 6.8 $B_d^0 \to \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$ 和 $B_u^+ \to \pi^+\pi^0$ 衰变图

对 $B_d^0 \to \pi^+\pi^-$ 过程，因末态是 CP 本征态且 $\pi^+\pi^-$ 为 s 波，故

$$CP|\pi^+\pi^-\rangle=\eta_{\pi^+\pi^-}|\pi^+\pi^-\rangle=|\pi^+\pi^-\rangle,\tag{6.115}$$

即

$$\eta_{\pi^+\pi^-}=1.\tag{6.116}$$

时间依赖的 CP 不对称性可用(6.96)式.

$$\mathscr{A}_{CP}(t)=S_{\pi^+\pi^-}\sin\Delta mt-C_{\pi^+\pi^-}\cos\Delta mt$$

来计算,其中

$$S_{\pi^+\pi^-}=\frac{2\mathrm{Im}\lambda_{\pi^+\pi^-}}{1+|\lambda_{\pi^+\pi^-}|^2},\quad C_{\pi^+\pi^-}=\frac{1-|\lambda_{\pi^+\pi^-}|^2}{1+|\lambda_{\pi^+\pi^-}|^2},\tag{6.117}$$

而

$$\lambda_{\pi^+\pi^-}=\left(\frac{q}{p}\right)_{\mathrm{B}_d^0}\frac{\overline{A}(\overline{\mathrm{B}}_d^0\to\pi^+\pi^-)}{A(\mathrm{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)}.\tag{6.118}$$

如果考虑树图而忽略企鹅图的贡献,由图 6.8 及(6.99)、(6.101)式,可有

$$A(\mathrm{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)=\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{ub}^*V_{ud}\langle\pi^+\pi^-|\{c_1(\bar{b}u)_{V-A}(\bar{u}d)_{V-A}$$
$$+c_2(\bar{b}_\alpha u_\beta)_{V-A}(\bar{u}_\beta d_\alpha)_{V-A}\}|\mathrm{B}_d^0\rangle,\tag{6.119}$$

$$\overline{A}(\overline{\mathrm{B}}_d^0\to\pi^+\pi^-)=\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{ub}V_{ud}^*\langle\pi^+\pi^-|\{c_1[(\bar{b}u)_{V-A}(\bar{u}d)_{V-A}]^\dagger$$
$$+c_2[(\bar{b}_\alpha u_\beta)_{V-A}(\bar{u}_\beta d_\alpha)_{V-A}]^\dagger\}|\overline{\mathrm{B}}_d^0\rangle.\tag{6.120}$$

利用 $(CP)^\dagger(CP)=(CP)(CP)^\dagger=1$,在(6.120)式{　}两端插入 $(CP)^\dagger(CP)=1$,且利用 $CP|\overline{\mathrm{B}}_d^0\rangle=|\mathrm{B}_d^0\rangle$ 的定义及双线型在 CP 变换下的性质(2.74)式可以证明,(6.120)和(6.119)式的矩阵元相等,即 A 和 $\overline{A}$ 振幅的不同仅在于 CKM 矩阵因子.因此,

$$\frac{\overline{A}(\overline{\mathrm{B}}_d^0\to\pi^+\pi^-)}{A(\mathrm{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)}=\frac{V_{ub}V_{ud}^*}{V_{ub}^*V_{ud}}.\tag{6.121}$$

由(6.93),(3.40)式可得

$$\lambda_{\pi^+\pi^-}=\frac{q}{p}\frac{\overline{A}(\overline{\mathrm{B}}_d^0\to\pi^+\pi^-)}{A(\mathrm{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)}=\frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{tb}V_{td}^*}\frac{V_{ub}V_{ud}^*}{V_{ub}^*V_{ud}}=\mathrm{e}^{2i\alpha}.\tag{6.122}$$

将(6.122)式代入(6.117)式,得

$$\mathscr{A}_{CP}(t)=\sin2\alpha\sin\Delta mt.\tag{6.123}$$

这样,我们就可以像在 $\mathrm{B}\to\psi\mathrm{K_S}$ 中抽取 $\sin2\beta$ 一样来干净地抽取 $\sin2\alpha$.

但是，在 $B_d^0 \to \pi^+\pi^-$ 中，企鹅图的贡献与树图贡献同量级，因而不能忽略，所以(6.123)式不能成立．我们必须想另外的办法．下面介绍一种同位旋分析的方法[28]．

由(6.101)，(6.119)式看出，衰变 $B_d^0 \to \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0, B_u^+ \to \pi^+\pi^0$ 的有效哈密顿量同位旋结构是：树图只有 $O_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}, O_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$；企鹅图只有 $O'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$．注意到 $|B_d^0\rangle$ 为 $|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle$ 态，$|B_u^+\rangle$ 为 $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ 态(这里只给出了 I, I_3 量子数)，利用第五章(5.43)，(5.45)式，在 $|I, I_3\rangle$ 表示中，

$$
\begin{aligned}
|\pi^+\pi^-\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2,0\rangle,\\
|\pi^0\pi^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2,0\rangle,\\
|\pi^+\pi^0\rangle &= |2,1\rangle,
\end{aligned}
\tag{6.124}
$$

再用 Wigner-Eckart 定理

$$
\langle \alpha'j'm'|T_{kq}|\alpha jm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2j'+1}} C_{jmkq}^{j'm'} \langle \alpha'j' \| T_k \| \alpha j\rangle,
$$

则可导出

$$
\begin{aligned}
\langle \pi^+\pi^-|H_w|B_d^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0 \| O'_{\frac{1}{2}} \| \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{30}}\langle 2 \| O_{\frac{3}{2}} \| \frac{1}{2}\rangle,\\
\langle \pi^0\pi^0|H_w|B_d^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 0 \| O'_{\frac{1}{2}} \| \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{15}}\langle 2 \| O_{\frac{3}{2}} \| \frac{1}{2}\rangle,\\
\langle \pi^+\pi^0|H_w|B_u^+\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}\langle 2 \| O_{\frac{3}{2}} \| \frac{1}{2}\rangle,
\end{aligned}
\tag{6.125}
$$

其中 $O'_{\frac{1}{2}}$ 包括树图和企鹅图的贡献，$O_{\frac{3}{2}}$ 只含树图的贡献．定义

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{15}}\langle 2 \| O_{\frac{3}{2}} \| \frac{1}{2}\rangle &\equiv A_2,\\
\frac{1}{\sqrt{6}}\langle O \| O'_{\frac{1}{2}} \| \frac{1}{2}\rangle &\equiv A_0,
\end{aligned}
\tag{6.126}
$$

则

$$\begin{aligned}
&\langle\pi^+\pi^-|H_w|B_d^0\rangle\equiv A^{+-}=\sqrt{2}(A_2-A_0),\\
&\langle\pi^0\pi^0|H_w|B_d^0\rangle\equiv A^{00}=2A_2+A_0,\\
&\langle\pi^+\pi^0|H_w|B_u^+\rangle\equiv A^{+0}=3A_2.
\end{aligned}\tag{6.127}$$

定义

$$z\equiv A_0/A_2,\quad \bar{z}=\bar{A}_0/\bar{A}_2.\tag{6.128}$$

类似于(6.127)式的关系对 $\overline{B}_d^0\to\pi^+\pi^-,\pi^0\pi^0,B_u^-\to\pi^-\pi^0$ 过程也存在，即

$$\begin{aligned}
&\bar{A}^{+-}=\sqrt{2}(\bar{A}_2-\bar{A}_0),\\
&\bar{A}^{00}=2\bar{A}_2+\bar{A}_0,\\
&\bar{A}^{-0}=3\bar{A}_2,
\end{aligned}\tag{6.129}$$

而

$$\begin{aligned}
\lambda_{\pi^+\pi^-}&=\frac{q}{p}\frac{\bar{A}(\overline{B}_d^0\to\pi^+\pi^-)}{A(B_d^0\to\pi^+\pi^-)}=\frac{q}{p}\frac{\bar{A}_2-\bar{A}_0}{A_2-A_0}\\
&=\frac{q}{p}\frac{\bar{A}_2}{A_2}\frac{1-\bar{z}}{1-z}.
\end{aligned}\tag{6.130}$$

(6.125)式表明，只有树图才对 $A_2,\bar{A}_2$ 有贡献，所以 $\bar{A}_2/A_2$ 满足(6.121)式．故由(6.122)式可知

$$\lambda_{\pi^+\pi^-}=e^{2i\alpha}\frac{1-\bar{z}}{1-z},\tag{6.131}$$

$$\mathrm{Im}\lambda_{\pi^+\pi^-}=\left|\frac{1-\bar{z}}{1-z}\right|\sin\left[2\alpha+\arg\left(\frac{1-\bar{z}}{1-z}\right)\right].\tag{6.132}$$

此时因 $|\lambda_{\pi^+\pi^-}|\neq1$，(6.132)式左方只能通过 CP 不对称获得，即由 CP 不对称 $\mathscr{A}_{\pi^+\pi^-}(t)$ 来获得，

$$\mathscr{A}_{\pi^+\pi^-}(t)=\frac{2\mathrm{Im}\lambda_{\pi^+\pi^-}}{1+|\lambda_{\pi^+\pi^-}|^2}\sin\Delta mt-\frac{1-|\lambda_{\pi^+\pi^-}|^2}{1+|\lambda_{\pi^+\pi^-}|^2}\cos\Delta mt.\tag{6.133}$$

现在的问题是如何用同位旋分析来得到 $z,\bar{z}$ 的值．

由图 6.9(a)可见，$z=A_0/A_2$ 的相角为 $\varphi_{A_0}-\varphi_{A_2}=\pm\theta$，即

$$\arg z=\arg\frac{A_0}{A_2}=\pm\theta,\tag{6.134}$$

±号来源于三角形(a)也可以朝下反转 180°(以 $\boldsymbol{A}_2$ 为轴)．同样，由图 6.9 中的(b)

图可见，

$$\arg \bar{z}=\arg \frac{\bar{A}_0}{\bar{A}_2}=\varphi_{\bar{A}_0}-\varphi_{\bar{A}_2}=\pm\bar{\theta}. \tag{6.135}$$

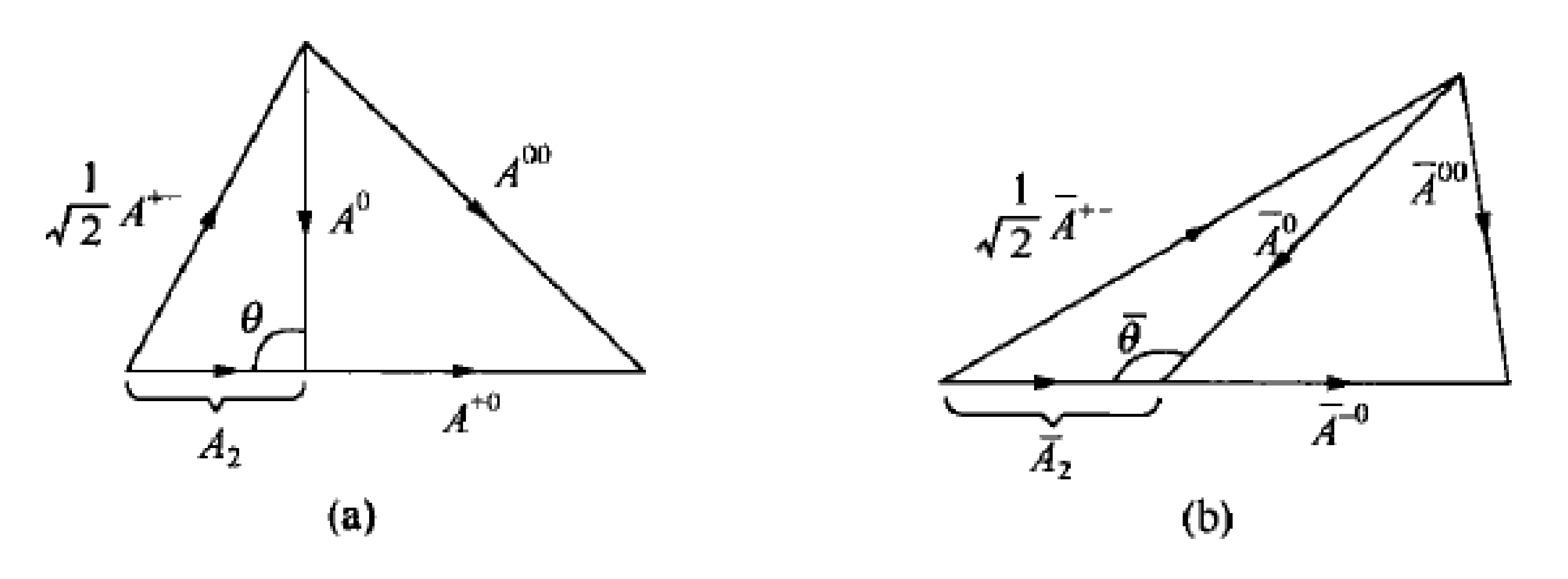


图 6.9　三角关系(6.127),(6.129)式在复平面上的图示

由(6.134),(6.135)式可见，$\arg\left(\frac{1-\bar{z}}{1-z}\right)$有四个可能的值．测出(6.127),(6.129)式中六个过程的分支比就可定出$|A^{+-}|$,$|A^{00}|$,$|A^{+0}|$,$|\bar{A}^{+-}|$,$|\bar{A}^{00}|$,$|\bar{A}^{-0}|$，从而画出图 6.9 的两个三角形．知道θ,$\bar{\theta}$就可定出四个角$\arg\left(\frac{1-\bar{z}}{1-z}\right)$，我们用$\pm\epsilon_{+-}$,$\pm\eta_{+-}$表示．令

$$\left|\frac{1-\bar{z}}{1-z}\right|\equiv m_{+-}, \tag{6.136}$$

则有

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha\pm\epsilon_{+-})&=\mathrm{Im}\lambda_{+-}/m_{+-},\\ \sin(2\alpha\pm\eta_{+-})&=\mathrm{Im}\lambda_{+-}/m_{+-}.\end{aligned} \tag{6.137}$$

类似地，我们也可以测出 $B_d^0\to\pi^0\pi^0$，$\bar{B}_d^0\to\pi^0\pi^0$ 的 CP 不对称性

$$\mathscr{A}_{\pi^0\pi^0}(t)=\frac{2\mathrm{Im}\lambda_{00}}{1+|\lambda_{00}|^2}\sin\Delta mt-\frac{1-|\lambda_{00}|^2}{1+|\lambda_{00}|^2}\cos\Delta mt, \tag{6.138}$$

其中

$$\lambda_{00}=\frac{q}{p}\frac{\bar{A}(\bar{B}_d^0\to\pi^0\pi^0)}{A(B_d^0\to\pi^0\pi^0)}=\frac{q}{p}\frac{\bar{A}_2}{A_2}\frac{1+\frac{1}{2}\bar{z}}{1+\frac{1}{2}z}=e^{2i\alpha}\frac{1+\frac{\bar{z}}{2}}{1+\frac{z}{2}}.$$

由此知

$$\mathrm{Im}\lambda_{00}=\left|\frac{1+\frac{\bar{z}}{2}}{1+\frac{z}{2}}\right|\sin\left[2\alpha+\arg\left(\frac{1+\frac{\bar{z}}{2}}{1+\frac{z}{2}}\right)\right]. \tag{6.139}$$

因 $\bar{z}$, z 都已知道，

$$\bar{z}=|\bar{z}|\mathrm{e}^{\pm i\bar{\theta}},\quad z=|z|\mathrm{e}^{\pm i\theta},$$

则 $\arg\left(\frac{1+\bar{z}/2}{1+z/2}\right)$ 也有四个值 $\pm\epsilon_{00}$，$\pm\eta_{00}$，由此可推出

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha\pm\epsilon_{00})&=\mathrm{Im}\lambda_{00}/m_{00},\\ \sin(2\alpha\pm\eta_{00})&=\mathrm{Im}\lambda_{00}/m_{00},\end{aligned} \tag{6.140}$$

其中

$$m_{00}=\left|\frac{1+\bar{z}/2}{1+z/2}\right|. \tag{6.141}$$

由(6.137)和(6.140)可以唯一决定 $\sin2\alpha$. 这个方法的不足之处是我们对 $\mathrm{B}_d^0\to\pi^0\pi^0$ 的测量数据(*CP* 不对称和分支比)还不太精确，因而影响方法的准确性．

利用 $\mathrm{B}_d^0\to\rho^+\rho^-$，$\rho^0\rho^0$ 和 $\mathrm{B}_u^+\to\rho^+\rho^0$ 实验数据及同位旋分析[29]可定出，

$$\alpha=(89.9\pm5.4)^\circ\quad 或\quad \alpha=\frac{3\pi}{2}-(89.9\pm5.4)^\circ. \tag{6.142}$$

当然还有不少其他方法，这里不详述，读者可参阅有关文献．

6.8.3 γ 角的测量

如果在 $\mathrm{B_s}\to\rho\mathrm{K_S}$ 过程中企鹅图的贡献可以忽略，则此过程是抽取 γ 角的好过程．$\mathrm{B_s}\to\rho\mathrm{K_S}$ 的衰变图如图 6.10 所示．

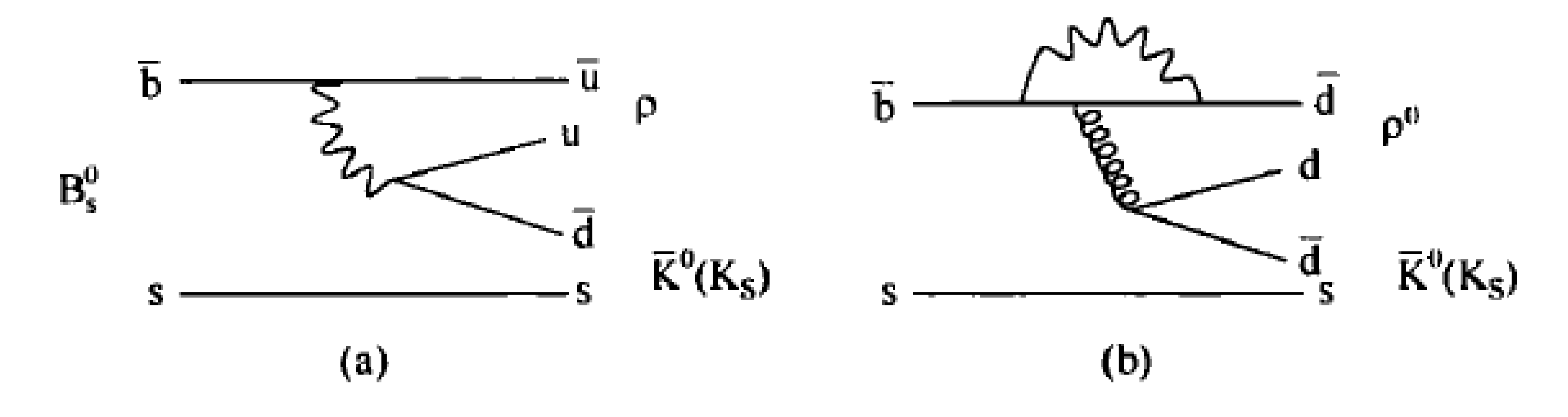


图 6.10 $\mathrm{B}_s^0\to\rho\mathrm{K_S}$ 衰变图

弱电企鹅图没画出

类似(6.121)式的证明，这里如果忽略企鹅图(b)的贡献，只有树图(a)时则有[参阅(6.86)式]

$$\frac{\overline{A}(\overline{B}_s\to\rho^0K_S)}{A(B_s\to\rho^0K_S)}=\eta_{CP}(\rho K_S)\frac{V_{ub}V_{ud}^*}{V_{ub}^*V_{ud}}=\eta_{CP}(\rho K_S)e^{-2i\gamma}. \tag{6.143}$$

由于我们采用的位相约定对 K^0-$\overline{K}^0$，B_d^0-$\overline{B}_d^0$，B_s^0-$\overline{B}_s^0$ 都是一样的，即有 $CP|K^0\rangle=|\overline{K}^0\rangle$，$CP|B_d^0\rangle=|\overline{B}_d^0\rangle$，$CP|B_s^0\rangle=|\overline{B}_s^0\rangle$，因而(4.79)式对以上三个系统都成立，即

$$\frac{q}{p}=\sqrt{\frac{M_{12}^*-\frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12}-\frac{i}{2}\Gamma_{12}}}.$$

对 B_d^0，B_s^0，由(6.29)，(6.39)式，可得

$$\frac{q}{p}\approx\sqrt{\frac{M_{12}^*}{M_{12}}}=\frac{V_{tb}^*V_{tq}}{V_{tb}V_{tq}^*}, \tag{6.144}$$

其中 q 代表 d 或 s. 对 B_s^0，

$$\frac{q}{p}=\frac{V_{tb}^*V_{ts}}{V_{tb}V_{ts}^*}\approx 1\quad[\text{准至 }O(\lambda^4)], \tag{6.145}$$

$$\lambda_{\rho K_S}=\left(\frac{q}{p}\right)_{B_s}\frac{\overline{A}(\overline{B}_s^0\to\rho K_S)}{A(B_s^0\to\rho K_S)}\approx e^{-2i\gamma}\eta_{CP}(\rho K_S)=-e^{-2i\gamma}. \tag{6.146}$$

CP 不对称性参数

$$\mathscr{A}_{B_s\to\rho K_S}(t)=\frac{2\mathrm{Im}\lambda_{\rho K_S}}{1+|\lambda_{\rho K_S}|^2}\sin\Delta mt=\sin2\gamma\sin\Delta mt. \tag{6.147}$$

因此，测出 CP 不对称 $\mathscr{A}_{B_S\to\rho K_S}(t)$ 就可测量 $\sin2\gamma$. 但由于企鹅图(b)(见图 6.10)与树图(a)的大小相近，因而使 $\sin2\gamma$ 的抽取陷入困境．

即使没有企鹅图的干扰，由于 B_s^0-$\overline{B}_s^0$ 振荡很快(比 B_d^0-$\overline{B}_d^0$ 快得多)，要测时间依赖的 CP 不对称 $\mathscr{A}(t)$ 也是对实验很大的挑战．

下面我们讨论通过 $B^\pm\to D^0(\overline{D}^0)K^\pm$ 过程来测定 γ 的方法．

考虑 $B^\pm\to DK$ 过程[30,31]. $B^-\to D^0K^-$，$\overline{D}^0K^-$ 的夸克图如图 6.11 所示．

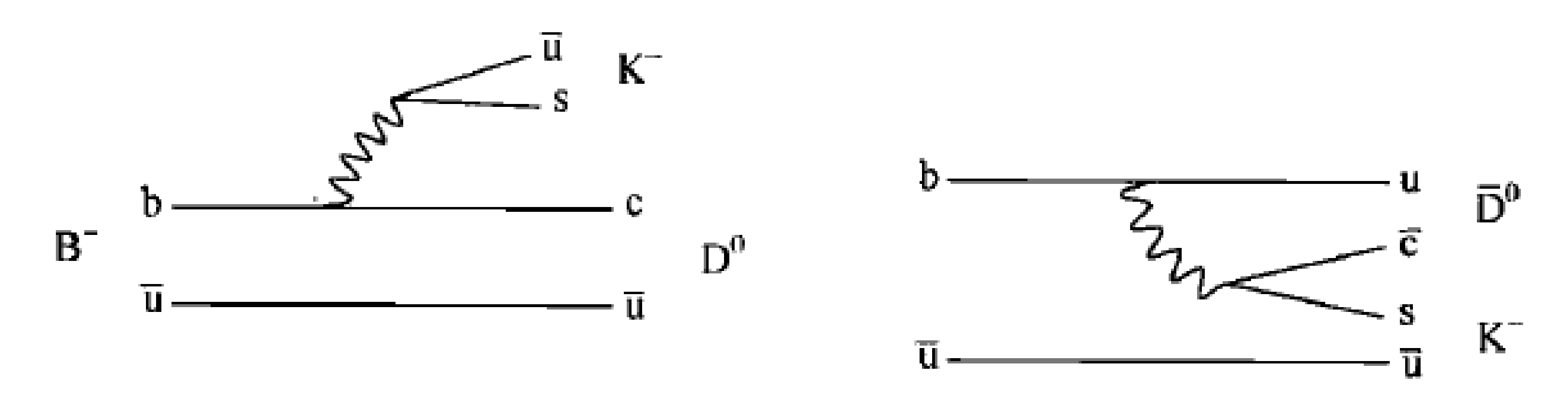


图 6.11　$B^-\to D^0K^-$，$\overline{D}^0K^-$ 的夸克图

从图 6.11 可看出，$B^- \to D^0 K^-$ 和 $B^- \to \overline{D}^0 K^-$ 都只有一个树图做贡献，因而末态都只有一个同位旋态．如果写成

$$A(B^- \to D^0 K^-) = V_{cb} V_{us}^* a_D e^{i\delta_D} = A_D e^{i\delta_D}, \tag{6.148}$$

则可以证明[参考 $K \to \pi\pi$ 中(5.25)式的证明]，在 CPT 不变性要求的前提下，

$$A(B^+ \to \overline{D}^0 K^+) = A_D^* e^{i\delta_D},$$

所以我们有如下衰变振幅间的关系：

$$\begin{aligned} A(B^- \to D^0 K^-) &= V_{cb} V_{us}^* a_D e^{i\delta_D} = A_D e^{i\delta_D} = |A_D| e^{i\delta_D}, \\ A(B^- \to \overline{D}^0 K^-) &= V_{ub} V_{cs}^* a_{\overline{D}} e^{i\delta_{\overline{D}}} = A_{\overline{D}} e^{i\delta_{\overline{D}}} = |A_{\overline{D}}| e^{i(-\gamma+\delta_{\overline{D}})}, \\ A(B^+ \to \overline{D}^0 K^+) &= V_{cb}^* V_{us} a_D^* e^{i\delta_D} = A_D^* e^{i\delta_D} = |A_D| e^{i\delta_D}, \\ A(B^+ \to D^0 K^+) &= V_{ub}^* V_{cs} a_{\overline{D}}^* e^{i\delta_{\overline{D}}} = A_{\overline{D}}^* e^{i\delta_{\overline{D}}} = |A_{\overline{D}}| e^{i(\gamma+\delta_{\overline{D}})}, \end{aligned} \tag{6.149}$$

(6.149)式中最后一步用了 CKM 矩阵的 Wolfenstein 表示且准至 $O(\lambda^4)$，还用了 $V_{ub} = |V_{ub}| e^{-i\gamma}$. 如果用半轻子衰变 $D^0 \to l^+ \nu_l X$，$\overline{D}^0 \to l^- \overline{\nu}_l X$ 来标定 D^0，$\overline{D}^0$，则 D^0，$\overline{D}^0$ 可区分．但有些时候末态是 CP 本征态，如

$$D^0 \to K^+ K^-,\quad \pi^+\pi^-,\quad K_S\pi^0,\quad K_S\rho^0,\quad K_S\omega,\quad K_S\eta \leftarrow \overline{D}^0, \tag{6.150}$$

则 D^0，$\overline{D}^0$ 衰变到同一末态，因而不能区分 D^0，$\overline{D}^0$.

因 D^0-$\overline{D}^0$ 系统的 CP 破坏效应极小，至今都没观察到，我们在讨论 B 介子衰变时可忽略 D 介子的 CP 破坏效应．这样，(6.150)式中 CP 为正或负的末态就应当是分别由 CP 宇称为正或负的 $D^0_{CP\pm}$ 衰变来的．我们定义

$$CP|D^0\rangle = |\overline{D}^0\rangle, \tag{6.151}$$

则

$$D_{CP\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|D^0\rangle \pm |\overline{D}^0\rangle). \tag{6.152}$$

$B^\pm \to (D^0_{CP\pm} K^\pm)$ 的衰变振幅可写成如下形式：

$$\begin{aligned} A(B^- \to D^0_{CP\pm} K^-) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[A(B^- \to D^0 K^-) \pm A(B^- \to \overline{D}^0 K^-)], \\ A(B^+ \to D^0_{CP\pm} K^+) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[A(B^+ \to D^0 K^+) \pm A(B^+ \to \overline{D}^0 K^+)]. \end{aligned} \tag{6.153}$$

实验上测量的是两个物理量[32]：电荷平均分衰变率(charge-averaged partial rate) $R_{CP\pm}$ 和分衰变率电荷不对称(partial-rate charge asymmetry) $A_{CP\pm}$，其定义为

$$R_{CP\pm}=\frac{\Gamma(B^-\to D^0_{CP\pm}K^-)+\Gamma(B^+\to D^0_{CP\pm}K^+)}{[\Gamma(B^-\to D^0K^-)+\Gamma(B^+\to \overline{D}^0K^+)]/2},\tag{6.154}$$

$$A_{CP\pm}=\frac{\Gamma(B^-\to D^0_{CP\pm}K^-)-\Gamma(B^+\to D^0_{CP\pm}K^+)}{\Gamma(B^-\to D^0_{CP\pm}K^-)+\Gamma(B^+\to D^0_{CP\pm}K^+)}.\tag{6.155}$$

利用(6.149),(6.153)式及(6.154),(6.155)式,可得

$$\begin{aligned}A_{CP\pm}&=\frac{|A(B^-\to D^0_{CP\pm}K^-)|^2-|A(B^+\to D^0_{CP\pm}K^+)|^2}{|A(B^-\to D^0_{CP\pm}K^-)|^2+|A(B^+\to D^0_{CP\pm}K^+)|^2}\\&=\frac{\mp 2|R|\sin\delta\sin\gamma}{1+|R|^2\pm 2|R|\cos\delta\cos\gamma},\end{aligned}\tag{6.156}$$

$$\begin{aligned}R_{CP\pm}&=\frac{|A(B^-\to D^0_{CP\pm}K^-)|^2+|A(B^+\to D^0_{CP\pm}K^+)|^2}{\frac{1}{2}[|A(B^-\to D^0K^-)|^2+|A(B^+\to \overline{D}^0K^+)|^2]}\\&=1+|R|^2\pm 2|R|\cos\delta\cos\gamma,\end{aligned}\tag{6.157}$$

其中

$$R=\frac{A(B^-\to \overline{D}^0K^-)}{A(B^-\to D^0K^-)}=|R|e^{-i(\gamma+\delta)},\quad \delta=\delta_D-\delta_{\overline{D}}.\tag{6.158}$$

须指出,(6.156),(6.157)式中的$|R|$值太小. 由(6.149)式,可得

$$|R|^2=\frac{\Gamma(B^-\to \overline{D}^0K^-)}{\Gamma(B^-\to D^0K^-)}\approx\left|\frac{V_{ub}V^*_{cs}}{V_{cb}V^*_{us}}\right|^2\left|\frac{a_{\overline{D}}}{a_D}\right|\approx 0.02.\tag{6.159}$$

这是因为$B^-\to\overline{D}^0K^-$是色压低的. 这对γ,δ的抽取带来较大误差.

一种补救办法是用三体末态$D^0,\overline{D}^0\to K_S\pi^+\pi^-,K_SK^+K^-$加上 Dalitz 图来分析$D^0$-$\overline{D}^0$的干涉项. 对上述三体末态,$D^0,\overline{D}^0$的衰变分支比相近而不出现$|R|$太小的问题. Belle 合作组用$B^+\to D^{(*)}K^+$等过程测出[33]

$$\gamma=(76^{+12}_{-13}\pm 4\pm 9)^\circ.$$

BaBar 合作组通过测$B^\mp\to D^{(*)}K^{(*)\mp}$测出[34]

$$\gamma=(76\pm 22\pm 5\pm 5)^\circ.$$

我们还有另外的办法测γ和δ[31]. 由(6.153)式,可得

$$\sqrt{2}A(B^-\to D^0_{CP+}K^-)=A(B^-\to D^0K^-)+A(B^-\to \overline{D}^0K^-),\tag{6.160}$$

$$\sqrt{2}A(B^-\to D^0_{CP-}K^-)=A(B^-\to D^0K^-)-A(B^-\to \overline{D}^0K^-),\tag{6.161}$$

$$\sqrt{2}A(B^+\to D^0_{CP+}K^+)=A(B^+\to D^0K^+)+A(B^+\to \overline{D}^0K^+),\tag{6.162}$$

$$\sqrt{2}A(\mathrm{B}^+\to\mathrm{D}^0_{CP-}\mathrm{K}^+)=A(\mathrm{B}^+\to\mathrm{D}^0\mathrm{K}^+)-A(\mathrm{B}^+\to\overline{\mathrm{D}}^0\mathrm{K}^+).\qquad(6.163)$$

将(6.160)～(6.163)式的振幅关系画在复平面上就可得到 δ 和 γ 的数值．从图 6.12看出，γ 角有两个不同的解．

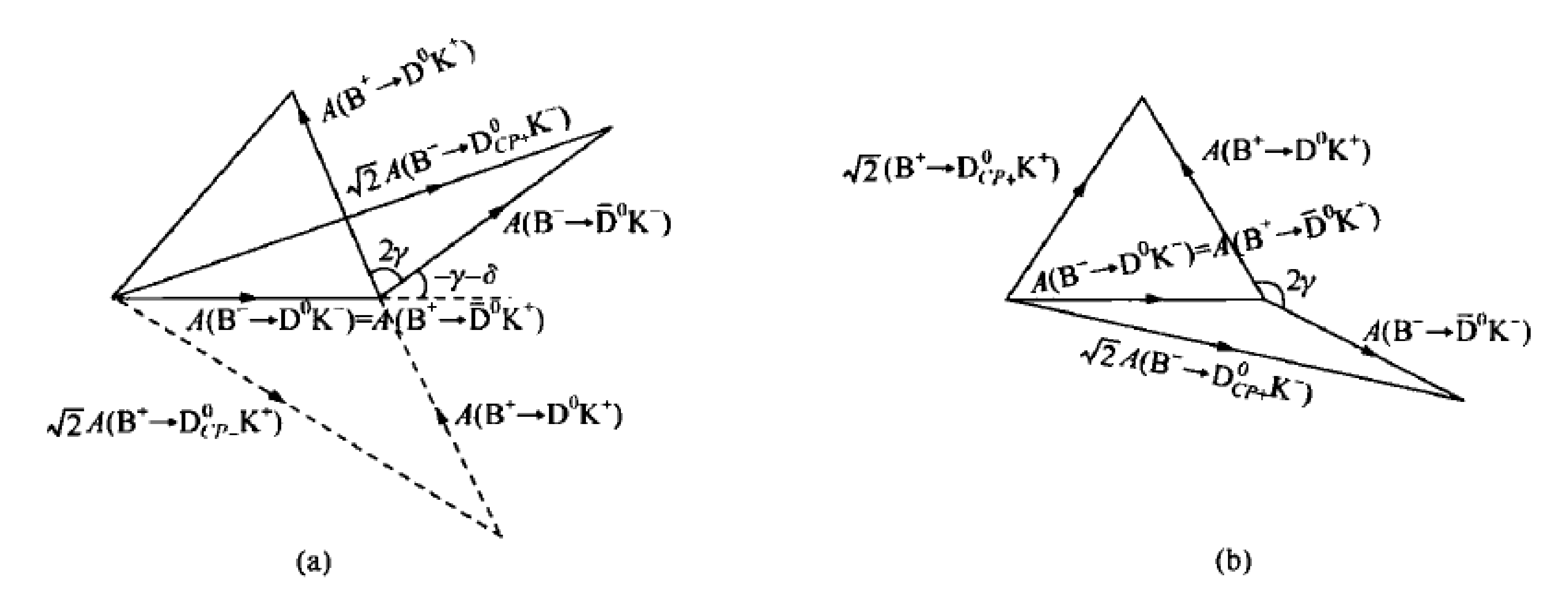


图 6.12　振幅关系(6.160)～(6.163)式的图示

其中 $\delta=\delta_{\mathrm{D}}-\delta_{\overline{\mathrm{D}}}$，(a)、(b)给出 γ 角的两个不同解

6.8.4　α,β,γ 的整体拟合

国际上有几个不同的组对世界各实验室已有的关于 CKM 矩阵元的实验值及幺正三角形的边长和角的实验数据进行加权平均，然后给出相应的数值，其中以 HFAG(Heavy Flavour Averaging Group)和 CKM fitter 组做的工作最多．现在我们只列出 2010 年国际高能会议(ICHEP10)上 CKM fitter 组给出的结果[35]，图 6.13 给出 CKM 矩阵在 Wolfenstein 参数化下的拟合结果，其中

$$\bar{\rho}=\rho\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right),\quad \bar{\eta}=\lambda\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right).\qquad(6.164)$$

对于 α,β,γ 角的拟合数值，我们把 CKM fitter 组给出的 $1\sigma,2\sigma,3\sigma$ 拟合出的三个角的数值列于表 6.1 中．

表 6.1　CKM fitter 拟合的幺正三角形三个角 α,β,γ 的数值

	1σ	2σ	3σ
α	91.0 ± 3.9	$91.0^{+7.5}_{-5.6}$	$91.0^{+9.6}_{-7.2}$
β	$21.76^{+0.92}_{-0.82}$	$21.8^{+1.9}_{-1.4}$	$21.8^{+2.8}_{-1.9}$
γ	67.2 ± 3.9	$67.2^{+5.4}_{-7.4}$	$67.2^{+6.9}_{-9.1}$

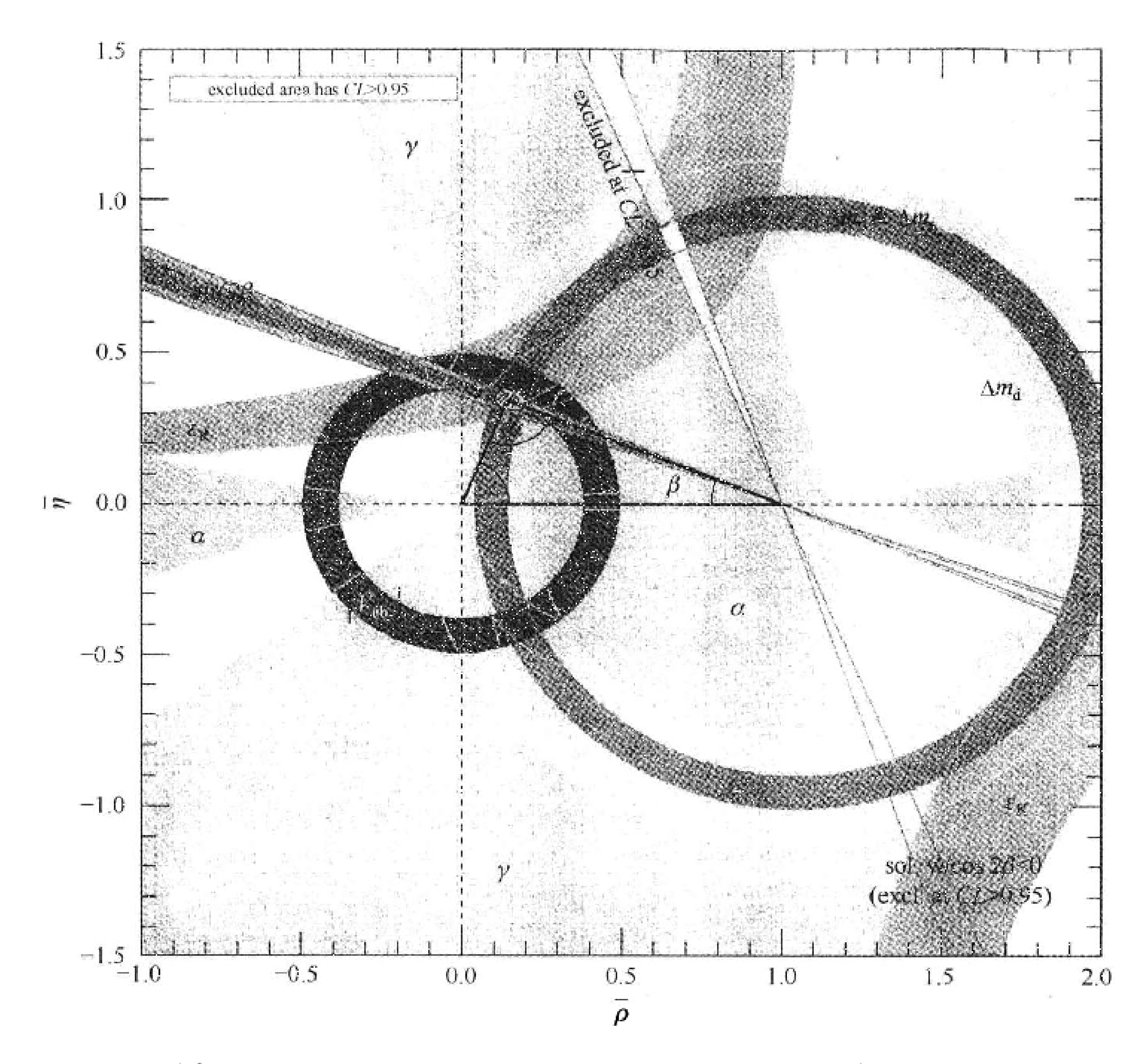


图 6.13 CKM fitter 组在 ICHEP10 会上展示的$\bar{\rho}$,$\bar{\eta}$ 的拟合图

§6.9 B 物理的未来发展

目前在 B 介子稀有衰变的分支比和 CP 破坏的测量结果与标准模型理论的预言之间有一些矛盾．比如 b 味重子半轻子衰变中同号 μ 子的电荷不对称性

$$\mathscr{A}_{\rm sl}^{\rm b}=\frac{N^{++}-N^{--}}{N^{++}+N^{--}}$$

的测量值(费米实验室的 D0 组)[36]

$$\mathscr{A}_{\rm sl}^{\rm b}=-0.00957\pm0.00251\pm0.00146$$

与标准模型的计算值

$$\mathscr{A}_{\rm sl}^{\rm b}({\rm SM})=(-2.3^{+0.5}_{-0.6})\times10^{-4}$$

有3.2σ的偏差．还有标准模型预言 $B^0 \to K^+\pi^-$ 和 $B^+ \to K^+\pi^0$ 的 CP 不对称性应当相等，即

$$\mathscr{A}_{CP}(K^+\pi^-)=\mathscr{A}_{CP}(K^+\pi^0),$$

但实验测出的是

$$\mathscr{A}_{CP}(B^0 \to K^+\pi^-)=(-9.8\pm1.2)\%,$$

$$\mathscr{A}_{CP}(B^+ \to K^+\pi^0)=(5.0\pm2.5)\%,$$

两者相差5σ. 还有一些别的矛盾，这里不一一介绍．

这些实验和标准模型预言之间的矛盾是否会需要新物理来解决还不十分清楚．这一方面是因为实验结果误差还较大，另一方面是因为理论预言在标准模型框架下仍有改进的余地．我们还需要理论和实验双方的进一步努力．

目前，欧洲大型强子对撞机 LHC 已经运转，不久之后做 B 物理的探测器 LHCb 也将取数据．由于其产生的 B 介子数将比 B 工厂高出许多，故对 B 介子许多物理量可做精确测量，相信很快会有许多新结果出现．

日本和意大利都已批准建造超级 B 工厂(super B factory)，其亮度比现有的日本及美国的 B 工厂高出 100 倍，即 $L\sim10^{36}\,\mathrm{cm^{-2}\,s^{-1}}$. 其对 B 介子衰变的测量精度至少会提高 10 倍．

LHC 和超级 B 工厂 还可以产生大量粲粒子(D, D_s, Λ_c 等等)，因而也是研究粲物理的好场所．另外 BEPCⅡ 也是研究粲物理和 J/ψ 物理的好场所．未来十年在 B 物理和粲物理领域将有更好更多的实验数据，因而在检验标准模型和寻找新物理方面有可能有新的突破．

目前实验上研究较少的是 B_s 和 $B_c^\pm$ 的物理．随着 LHCb 实验的开展，对 B_s，$B_c^\pm$ 将会有很多的测量，将来超级 B 工厂会有更精确的实验研究．理论方面对 B_s，$B_c^\pm$ 的研究较早的文章可参阅[37,38].

参考文献

[1] Aubert J J, et al. Phys. Rev. Lett., 1974, 33: 1404.

[2] Augustin J E, et al. Phys. Rev. Lett., 1974, 33: 1406.

[3] Herb J W, et al. Phys. Rev. Lett., 1977, 39: 252.

[4] Besson D, et al. (CLEO Collaboration). Phys. Rev. Lett., 1985, 54: 382. Lovelock D M J, et al. (CUSP Collaboration). Phys. Rev. Lett., 1985, 54: 377.

[5] PDG. Particle Physics Booklet. 2012 edition.

[6] Albrecht H, et al. (ARGUS Collaboration). Phys. Lett. B, 1987, 192: 245.

[7] Hagelin J S. Nucl. Phys. B, 1981, 193: 123. Bigi I I, Khoze V, Sanda A, et al. CP Vio-

lation. World Scientific Press, 1988.

[8] Nakamura K, et al. (PDG). J. of Phys. G, 2010, 37: 075021.

[9] Ellis J, Hagelin J S, Rudaz S. Phys. Lett. B, 1987, 192: 201. Du D S, Zhao Z Y. Phys. Rev. Lett. , 1987, 59: 1072.

[10] Hitlin D G. Asymmetric B Factory // Georgi, et al. CP Violation: From Quarks to Leptons. SIF and IOS Press, 2006.

[11] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2002, 479: 1.

[12] Abashian A, et al. (Belle Collaboration). Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2002, 479: 117.

[13] HFAG (Heavy Flavor Averaging Group)2010.

[14] Branco G C, Lavoura L, Silva J P. CP Violation. Clarendon Press, 1999.

[15] Du D S, Dunietz I, Wu D D. Phys. Rev. D, 1968, 34: 3414.

[16] Buchalla G, Buras A J, Lautenbacher M E. Rev. Mod. Phys. , 1996, 68: 1125.

[17] Wirbel M, Stech B, Bauer M. Z. Phys. C, 1985, 29: 2637; Z. Phys. C, 1989, 34: 103.

[18] Buras A J, Jamin M, Lautenbacher M E, et al. Nucl. Phys. B, 1992, 370: 69. Buras A J, Jamin M, Lautenbacher M E. Nucl. Phys. B, 1993, 408: 209. Fleisher R. Z. Phys. C, 1993,58: 483. Cheng H Y, Tseng B. arXiv:hep-ph/9708211.

[19] Beneke M, Buchalla G, Neubert M, et al. Phys. Rev. Lett. , 1999, 83: 1914; Nucl. Phys. B, 2000, 591: 313.

[20] Du D S, Yang D S, Zhu G H. Phys. Rev. D, 2001, 64: 014036; Phys. Lett. B, 2001, 509: 263. Beneke M, Buchalla G, Neubert M, et al. Phys. Lett. B, 2001, 606: 245. Du D S, Gong H J, Sun J F, et al. Phys. Rev. D, 2002, 65: 094025. Du D S, Sun J F, Yang D S,et al. Phys. Rev. D, 2003, 67: 014023.

[21] Keum Y Y, Li H N, Sanda A I. Phys. Lett. B, 2001, 504: 6; Phys. Rev. D, 2001, 63: 054008. Lu C D, Ukai K, Yang M Z. Phys. Rev. D, 2001, 63: 074009.

[22] Lapage G P, Brodsky S T. Phys. Rev. D, 1980, 22: 2157. Szczepaniak A, Henly E M, Brodsky S. Phys. Lett. B, 1990, 243: 287.

[23] Bauer C W, Fleming S, Pirjol D, et al. Phys. Rev. D, 2001, 63: 114020. Bauer C W, Pirjol D, Stewart I W. Phys. Rev. D, 2002, 65: 054022. Beneke M, Chapovsky A P, Diehl M, et al. Nucl. Phys. B, 2002, 643: 431. Beneke M, Feldmann T, Phys. Lett. B, 2003, 553: 267.

[24] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Phys. Rev. Lett. , 2001, 86: 2515. Abashian A, et al. (Belle Collaboration). Phys. Rev. Lett. , 2001, 86: 2509.

[25] Barberio E, et al. (Heavy Flavor Averaging Group (HFAG)). arXiv:0808.1297; http://www. slac. stanford. edu/xorg/hfag/.

[26] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Phys. Rev. D. , 2005, 71: 032005.

[27] Krokovny P, et al. (Belle Collaboration). Phys. Rev. Lett. , 2006, 97: 081801.

[28] Gronau M, London D. Phys. Rev. Lett. , 1990, 65: 3381.

[29] Höcker A, et al. Eur. Phys. J. C, 2001, 21: 225; http:// ckmfitter. in2p3. fr.
[30] Bigi I I, Sanda A I. Nucl. Phys. B, 1981, 193: 85.
[31] Gronau M, Wyler D. Phys. Lett. B, 1991, 265: 172. Gronau M, London D. Phys. Lett. B, 1991, 253: 483. Dunietz I. Phys. Lett. B, 1991, 270: 75.
[32] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Phys. Rev. D, 2008, 77: 111102(R).
[33] Poluektov A, et al. (Belle Collaboration). arXiv: 0803. 3375; 1003. 3360.
[34] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Phys. Rev. D, 2008, 78: 034023.
[35] Charles J, et al. (CKM fitter Group). Eur. Phys. J. C, 2005, 41: 1. http://ckmfitter. in2p3. fr.
[36] Abazov V M, et al. (D0 Collaboration). Phys. Rev. Lett. , 2010, 105: 081801.
[37] Du D S, Wang Z. Phys. Rev. D, 1998, 38: 3570. Du D S, Xing Z Z. Phys. Rev. D, 1993, 48: 3400. Du D S, Liu C. Phys. Rev. D, 1994, 49: 2631. Du D S, Yang M Z. Phys. Lett. B, 1995, 358: 123. Sun J F, Zhu G H, Du D S. Phys. Rev. D, 2003, 68: 054003.
[38] Du D S, Wang Z. Phys. Rev. D, 1989, 39: 1342. Du D S, Li X L, Yang Y D. Phys. Lett. B, 1996, 380: 193. Du D S, Lu G R, Yang Y D. Phys. Lett. B, 1996, 387: 187. Du D S, Jin H Y, Yang Y D. Phys. Lett. B, 1997, 414: 130. Dai Y S, Du D S. Eur. Phys. J. C, 1999, 9: 557. Cheng J F, Du D S, Lu C D. Eur. Phys. J. C, 2006, 45: 711. Sun J F, Xue G F, Yang Y L, et al. Phys. Rev. D, 2008, 77: 074013. Sun J F, Du D S, Yang Y L. Eur. Phys. J. C, 2009, 60: 107.

第七章　粲粒子系统的 *CP* 破坏

表面上看，粲粒子衰变是寻找 *CP* 破坏的理想场所，因为世界各实验室已产生了大量粲粒子，其数量已和产生的 B_d 粒子相当，且远远超过了 B_s、Λ_b 等粒子. e^+e^- 对撞机 BEPC Ⅰ，BEPC Ⅱ，CESR-C 等可在阈附近产生 D-$\bar{D}$，而 B 工厂 PEP-Ⅱ，KEK-B 等通过产生 D^* 再衰变产生 D，$\bar{D}$ 介子.

出乎人们预料的是，最近实验表明[1]，D^0-$\bar{D}^0$ 混合非常小($x,y\lesssim10^{-2}$)，而且迄今为止，粲粒子衰变实验中还没有发现可靠的 *CP* 破坏证据. 标准模型预言的粲粒子 *CP* 破坏$\lesssim10^{-3}$，因此，未来粲粒子实验中一旦发现了大的 *CP* 破坏($>10^{-2}$)，就意味着新物理的出现.

§7.1　D^0-$\bar{D}^0$ 混合的理论预言

在第四章中我们已经系统地描述了中性粒子系统 *CP* 破坏的量子力学. 为方便起见，我们再把 D^0-$\bar{D}^0$ 系统的情况稍加重复.

描述 D^0-$\bar{D}^0$ 系统随时间演化的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}D^0(t)\\ \bar{D}^0(t)\end{pmatrix}=\left(M-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma\right)\begin{pmatrix}D^0(t)\\ \bar{D}^0(t)\end{pmatrix},\tag{7.1}$$

其中 M,Γ 均为 2×2 厄米矩阵. 假定 *CPT* 不变性成立，则有

$$M_{11}=M_{22}=M,\quad \Gamma_{11}=\Gamma_{22}=\Gamma.\tag{7.2}$$

采用相位规则 $CP|D^0\rangle=|\bar{D}^0\rangle$(这点很重要，这决定谁是 *CP* 宇称为正的本征态，$|D_1\rangle$，还是$|D_2\rangle$)，则可定义

$$\begin{aligned}|D_1\rangle&=p|D^0\rangle+q|\bar{D}^0\rangle,\\ |D_2\rangle&=p|D^0\rangle-q|\bar{D}^0\rangle,\end{aligned}\tag{7.3}$$

这样$|D_1\rangle$的 *CP* 宇称为正(近似地，若不考虑 *CP* 破坏)，$|D_2\rangle$的 *CP* 宇称为负.

令$|D_1\rangle$，$|D_2\rangle$相应的本征值为

$$\lambda_1=m_1-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_1,\quad \lambda_2=m_2-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_2,\tag{7.4}$$

我们记

$$\Gamma=\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}, \qquad m=\frac{m_1+m_2}{2},$$
$$\Delta m=m_1-m_2, \quad \Delta\Gamma=\Gamma_1-\Gamma_2, \tag{7.5}$$
$$x=\frac{\Delta m}{\Gamma}, \qquad y=\frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma}.$$

此处的定义与通常实验物理学家用的符号一致，但与我们前面第四章(4.74)，(4.75)式的定义有符号上的差别.

标准模型下，D-$\bar{\rm D}$ 混合的短程贡献主要来自箱图(box diagram)和双企鹅图(dipenguin diagram). 两种图分别见图 7.1 和图 7.2.

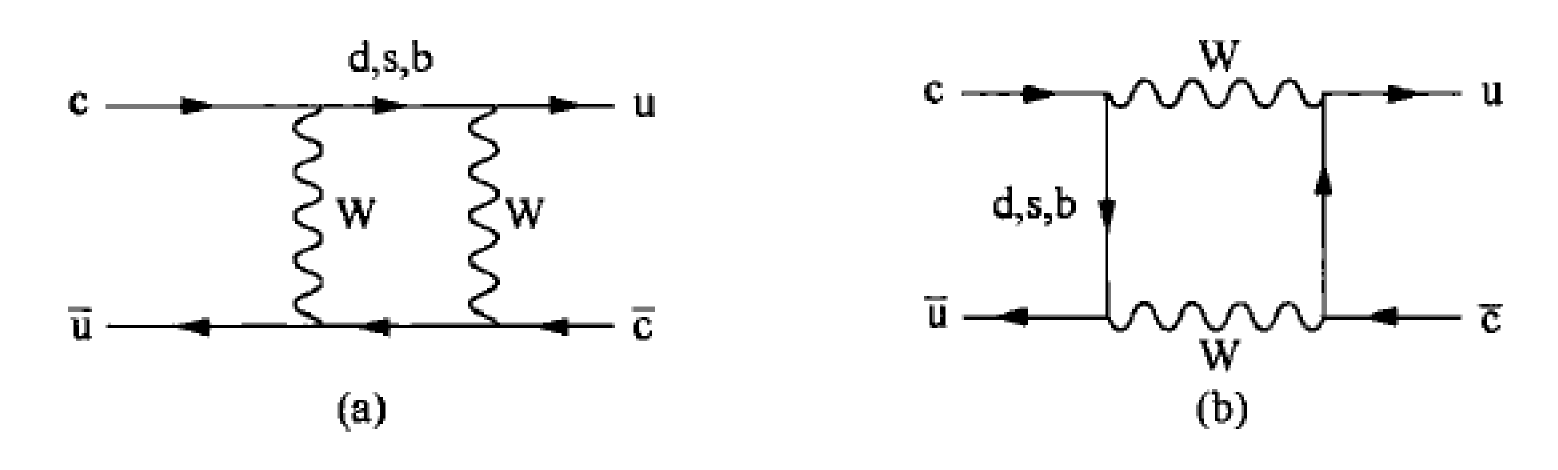


图 7.1 D-$\bar{\rm D}$ 混合的箱图

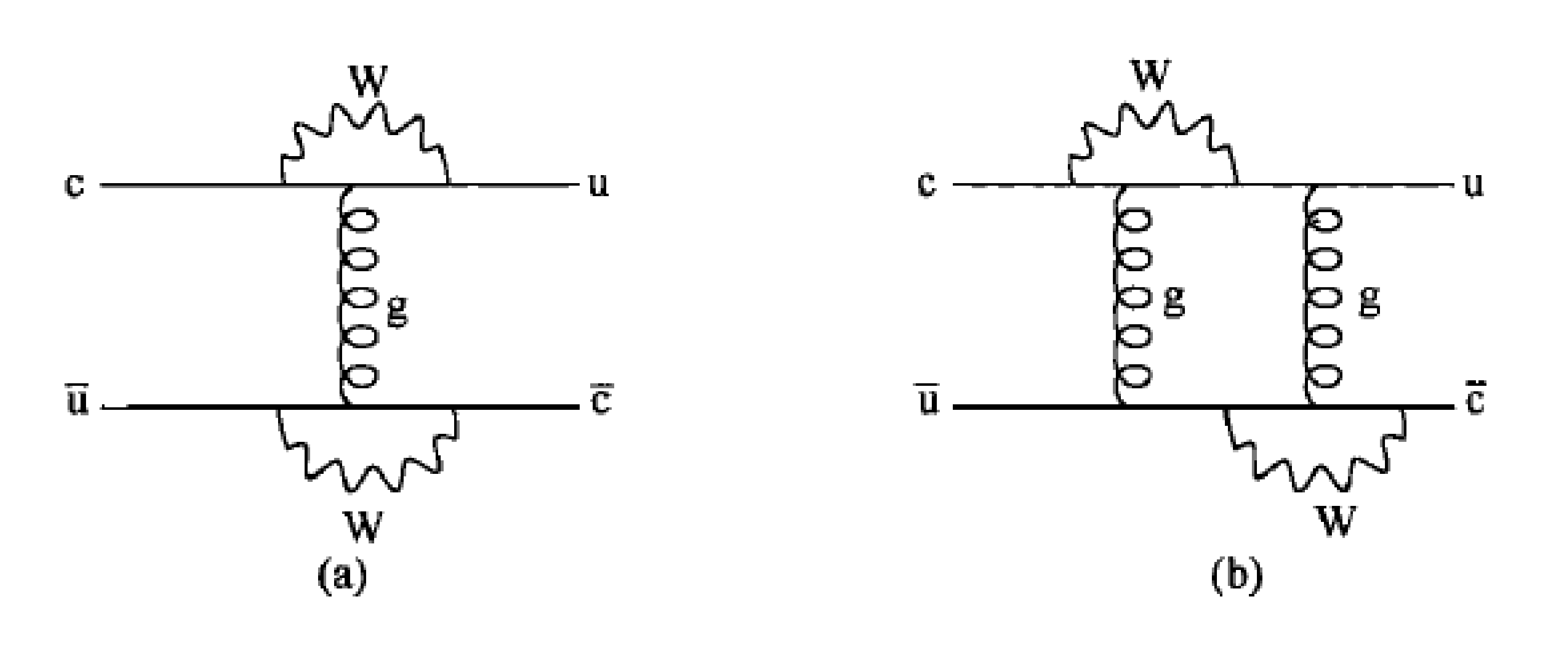


图 7.2 双企鹅图

(a)为短程贡献，(b)为长程贡献，因胶子动量可以很小

在箱图中，由于交换 b 夸克的图受 CKM 矩阵元 $V_{\rm cb}$ 和 $V_{\rm ub}$ 的极大压低，其贡献可以忽略，因而箱图的贡献主要来自交换 s 和 d 夸克的图. 具体计算[2]给出

$$\Delta m_{\rm D}^{\rm box}=\frac{G_{\rm F}}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{4\pi\sin^2\theta_{\rm W}}\xi_{\rm s}\xi_{\rm d}\ \frac{4}{3}\frac{(m_{\rm s}^2-m_{\rm d}^2)^2}{m_{\rm W}^2 m_{\rm c}^2}f_{\rm D}m_{\rm D}(B_{\rm d}-2B'_{\rm d}), \tag{7.6}$$

其中 $\xi_i=V_{ci}^* V_{ui}$ $(i={\rm s,d})$，$B_{\rm d}$，$B'_{\rm d}$ 为“口袋参数”(bag parameters). 在真空饱和(插入真空中间态)近似下 $B_{\rm d}\approx B'_{\rm d}\approx 1$.

从(7.6)式可看出，在味 SU(3)对称下，$m_{\rm s}=m_{\rm d}$，则 $\Delta m_{\rm D}^{\rm box}=0$.

当取 $f_\pi=132$ MeV，$f_{\rm D}\sim 165$ MeV，$B_{\rm d}\approx B'_{\rm d}\approx 1$ 时，(7.6)式可推得

$$\Delta m_D^{box} \approx 0.5 \times 10^{-17} \left(\frac{m_s(\mathrm{GeV})}{0.2\mathrm{GeV}}\right)^4 \left|\frac{f_D}{f_\pi}\right|^2 \mathrm{GeV}. \tag{7.7}$$

D^0 的总宽度

$$\Gamma \approx 1.605 \times 10^{-12}\ \mathrm{GeV},$$

由(7.7)式,可得

$$\frac{\Delta m_D^{box}}{\Gamma} = x^{box} \approx O(10^{-7} \sim 10^{-6}). \tag{7.8}$$

双企鹅图的贡献[3]

$$\Delta m_D^{dp} \approx -0.2 \times 10^{-17} \left(\frac{f_D}{f_\pi}\right)^2, \tag{7.9}$$

这与箱图贡献量级相同但反号.

总体上讲,短程贡献导致

$$\frac{\Delta m_D^{sd}}{\Gamma} \sim O(10^{-7} \sim 10^{-6}). \tag{7.10}$$

由于粲夸克质量 m_c 只有约 1.5 GeV,所以长程作用对 Δm_D 的贡献是很重要的.但我们对长程作用又没有可靠的方法计算,因而使对 Δm_D 的理论预言是完全不可靠的.目前国际上有些估算,这里略说一二.

Georgi 用重夸克有效理论计算了 4 夸克算符、6 夸克算符和 8 夸克算符的贡献[4],结果给出

$$x \approx (0.6 \sim 2) \times 10^{-4};$$

Bigi 和 Uraltsev 给出[5]

$$x \sim y \sim 10^{-3};$$

Donoghue 等人[6]考虑了 D^0-$\bar{D}^0$ 通过强子中间态 K^+K^-,$\pi^+\pi^-$,$K\pi$ 等的混合,给出

$$x^2 + y^2 \sim 10^{-8}.$$

以上各种理论的共同特点是,在标准模型下预言的混合参数都很小.当然,这些预言的具体数字是不可靠的.

非标准模型(新物理模型)可以给出较大的混合参数,但从现在的实验结果看,似乎不需要新物理.

§7.2 D^0-$\bar{D}^0$ 混合的实验测量

在 B 工厂,测量 D^0-$\bar{D}^0$ 混合是靠测 D^0,$\bar{D}^0$ 衰变到 KK,$K\pi$,$\pi\pi$ 等的时间分布来

实现的，因此要求 $D^0(\bar{D}^0)$ 动量要足够大才能测其衰变时间. 通常要求动量大于 2.5 GeV/c. $D^0(\bar{D}^0)$ 靠 $D^*\to D\pi$ 产生，即 $D^{*+}\to\pi_s^+D^0$，$D^{*-}\to\pi_s^-\bar{D}^0$. 其中 $\pi_s^\pm$ 表示"慢 π 介子"(slow pion)". $\pi_s^\pm$ 的电荷用来标定是 D^0 还是 $\bar{D}^0$. 但在能量对称的 e^+e^- 对撞机(如 CESR-c，CLEO-c，BEPCⅡ，BESⅢ)上，由于产生的 $D^0(\bar{D}^0)$ 动量很小，不能测衰变时间，只能靠测时间积分的观测量来实现. 后面我们会讨论这两种不同的情况.

7.2.1 准备知识

由第四章(4.83)，(4.84)式，$|D^0\rangle$，$|\bar{D}^0\rangle$ 随时间的变化为

$$\begin{aligned}|D^0(t)\rangle&=g_+(t)|D^0\rangle+\frac{q}{p}g_-(t)|\bar{D}^0\rangle,\\ |\bar{D}^0(t)\rangle&=\frac{p}{q}g_-(t)|D^0\rangle+g_+(t)|\bar{D}^0\rangle,\end{aligned}\tag{7.11}$$

其中

$$g_\pm(t)=\frac{1}{2}e^{-imt-\frac{\Gamma t}{2}}\left(e^{-i\frac{\Delta mt}{2}-\frac{\Delta\Gamma}{4}}\pm e^{i\frac{\Delta mt}{2}+\frac{\Delta\Gamma}{4}}\right).\tag{7.12}$$

注意这里 $g_\pm(t)$ 与(4.84)式的差别是 Δm，$\Delta\Gamma$ 差负号，这是因为 Δm，$\Delta\Gamma$ 的定义(7.5)式与(4.85)式差负号. 在 BaBar 实验中[7]，测量的 $D^0(\bar{D}^0)$ 衰变的固有时间 t 一般限定在 $-2\text{ps}<t<4\text{ps}$，D^0 介子的寿命也在 ps 量级，所以 $\Gamma t\sim O(1)$. 又因 x^2，y^2 都很小，$x^2(y^2)\ll1$，所以我们可以对 $g_\pm(t)$ 的表达式做一些近似.

由(7.12)和(4.90)式，得

$$\begin{aligned}|g_+(t)|^2&=\frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\left(\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+\cos\Delta mt\right)\\ &\approx\frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\left(2+\frac{1}{2}y^2\Gamma^2t^2-\frac{1}{2}x^2\Gamma^2t^2\right)\approx e^{-\Gamma t},\end{aligned}\tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}|g_-(t)|^2&=\frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\left(\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}-\cos\Delta mt\right)\\ &\approx e^{-\Gamma t}\frac{x^2+y^2}{4}(\Gamma t)^2,\end{aligned}\tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}g_+^*(t)g_-(t)&=-\frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\left(\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+i\sin\Delta mt\right)\\ &\approx-\frac{1}{2}e^{-\Gamma t}(y\Gamma t+ix\Gamma t).\end{aligned}\tag{7.15}$$

由(7.15)式知

$$\mathrm{Re}[g_+^*(t)g_-(t)] \approx -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}y\Gamma t,$$
$$\mathrm{Im}[g_+^*(t)g_-(t)] \approx -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}x\Gamma t. \tag{7.16}$$

下面我们基本上按文献[8]的思路给出一些有用的公式.

$D^0 \to K^+\pi^-$ 为 Cabibbo 二次压低过程(DCS). $D^0(\bar{D}^0) \to K^\pm\pi^\mp$ 的费曼图如图 7.3 所示.

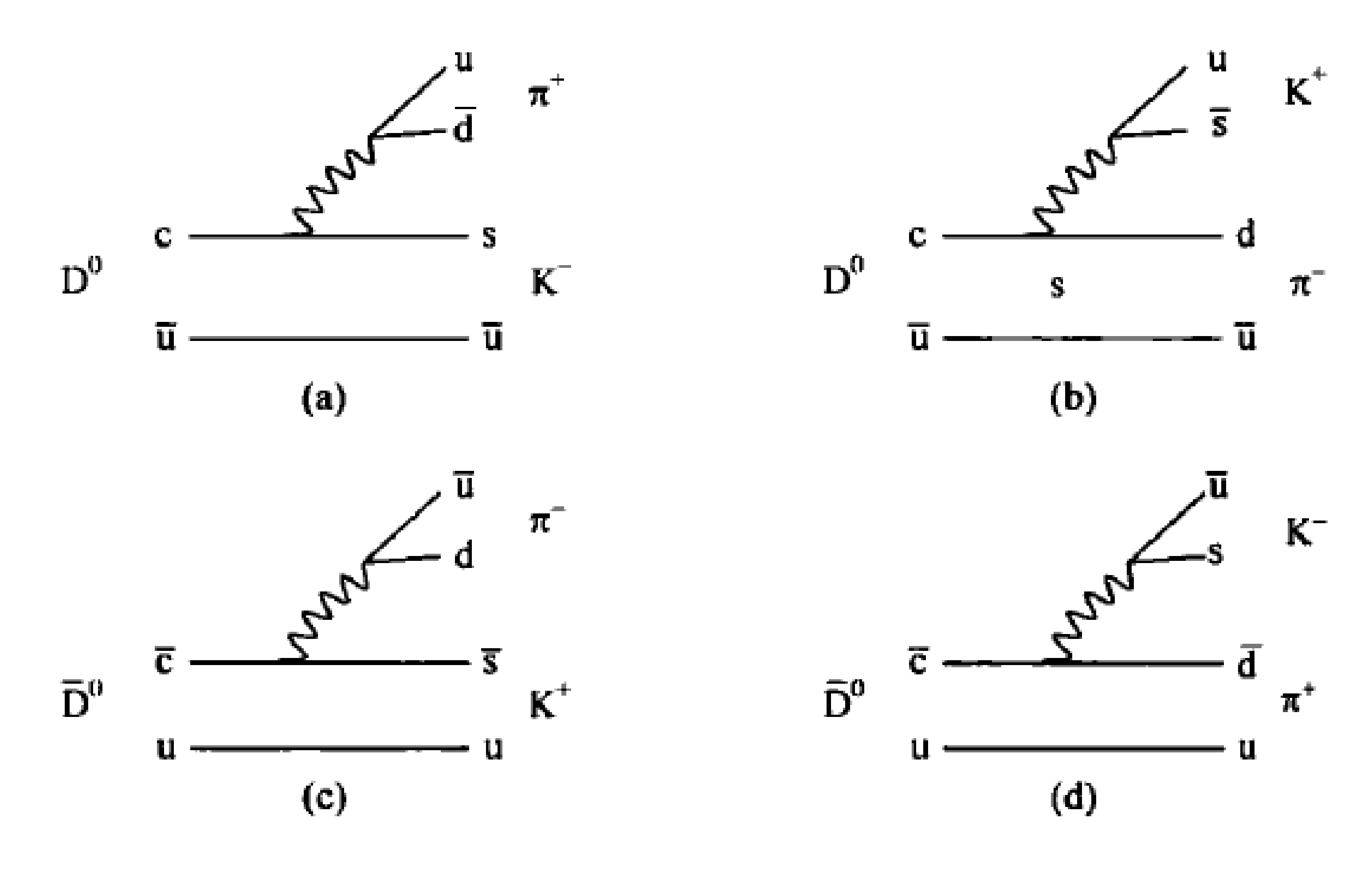


图 7.3 $D^0(\bar{D}^0) \to K^\pm\pi^\mp$ 费曼图

(a),(c)为 Cabibbo-favored(CF)衰变;(b),(d)为 Cabibbo 二次压低(DCS)衰变

定义 $A_{K^+\pi^-} = A(D^0 \to K^+\pi^-)$ 为 $D^0 \to K^+\pi^-$ 的衰变振幅,$\bar{A}_{K^+\pi^-} = \bar{A}(\bar{D}^0 \to K^+\pi^-)$ 为 $\bar{D}^0 \to K^+\pi^-$ 的衰变振幅,$A_{K^-\pi^+} = A(D^0 \to K^-\pi^+)$ 为 $\bar{D}^0 \to K^-\pi^+$ 的衰变振幅,$\bar{A}_{K^-\pi^+} = \bar{A}(\bar{D}^0 \to K^-\pi^+)$ 为 $\bar{D}^0 \to K^-\pi^+$ 的衰变振幅,

$$\left|\frac{q}{p}\right| = R_m, \quad \frac{q}{p} = R_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{7.17}$$

令

$$A_{K^+\pi^-} = |A_{K^+\pi^-}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{A_{K^+\pi^-}}}, \tag{7.18}$$

$$\bar{A}_{K^+\pi^-} = |\bar{A}_{K^+\pi^-}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\varphi}_w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{\bar{A}_{K^+\pi^-}}}, \tag{7.19}$$

其中 φ_w,$\bar{\varphi}_w$ 为弱位相,$\delta_{A_{K^+\pi^-}}$,$\delta_{\bar{A}_{K^+\pi^-}}$ 为相应的强位相. 取 CKM 矩阵准至 λ^3 时,由(3.63)式得

$$\varphi_w = \pi, \quad \bar{\varphi}_w = 0. \tag{7.20}$$

这一点可由图 7.3 看出. φ_w 来自 $V_{us}V_{cd}^* = -\lambda^2 = \lambda^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$,$\bar{\varphi}_w$ 来自 $V_{ud}^*V_{cs} \approx 1-\lambda^2$. 由(7.18)~(7.20)式,可定义

$$\frac{A_{K^+\pi^-}}{\overline{A}_{K^+\pi^-}}=-\sqrt{R}e^{-i\delta},\quad \delta=\delta_{\overline{A}_{K^+\pi^-}}-\delta_{A_{K^+\pi^-}},\tag{7.21}$$

负号来自 $\varphi_w=\pi$，$R=\left|\frac{A_{K^+\pi^-}}{\overline{A}_{K^+\pi^-}}\right|^2\approx\lambda^4\ll 1$ 为 DCS 衰变与 CF 衰变率的比值.

$$\lambda_{K^+\pi^-}^{-1}=\frac{p}{q}\frac{A_{K^+\pi^-}}{\overline{A}_{K^+\pi^-}}=-\sqrt{R}R_m^{-1}e^{-i(\delta+\varphi)}.\tag{7.22}$$

在 CPT 不变的假设下，

$$A_{K^-\pi^+}=|\overline{A}_{K^+\pi^-}|e^{-i\varphi_w}e^{i\delta_{\overline{A}_{K^+\pi^-}}}=|\overline{A}_{K^+\pi^-}|e^{i\delta_{\overline{A}_{K^+\pi^-}}},\tag{7.23}$$

$$\overline{A}_{K^-\pi^+}=|A_{K^+\pi^-}|e^{-i\varphi_w}e^{i\delta_{A_{K^+\pi^-}}}=-|A_{K^+\pi^-}|e^{i\delta_{A_{K^+\pi^-}}},\tag{7.24}$$

所以有

$$\lambda_{K^-\pi^+}=\frac{q}{p}\frac{\overline{A}_{K^-\pi^+}}{A_{K^-\pi^+}}=-\sqrt{R}R_m e^{-i(\delta-\varphi)}.\tag{7.25}$$

容易推出

$$\begin{aligned}\Gamma(D^0(t)\to K^+\pi^-)&\propto|A(D^0(t)\to K^+\pi^-)|^2\\&=\left|\frac{q}{p}\right|^2|\overline{A}_{K^+\pi^-}|^2\Big\{|g_+(t)|^2|\lambda_{K^+\pi^-}^{-1}|^2+|g_-(t)|^2\\&\quad+2\mathrm{Re}[g_+(t)g_-^*(t)\lambda_{K^+\pi^-}^{-1}]\Big\}\\&\approx e^{-\Gamma t}|\overline{A}_{K^+\pi^-}|^2\Big[R+\sqrt{R}R_m(y'\cos\varphi-x'\sin\varphi)\Gamma t\\&\quad+\frac{R_m^2}{4}(x'^2+y'^2)(\Gamma t)^2\Big],\end{aligned}\tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\overline{D}^0(t)\to K^-\pi^+)&\propto\left|\frac{p}{q}\right|^2|A_{K^-\pi^+}|^2\Big\{|g_-(t)|^2+|g_+(t)|^2|\lambda_{K^-\pi^+}|^2\\&\quad+2\mathrm{Re}[g_-^*(t)g_+(t)\lambda_{K^-\pi^+}]\Big\}\\&\approx e^{-\Gamma t}|A_{K^-\pi^+}|^2\Big[R+\sqrt{R}R_m^{-1}(y'\cos\varphi+x'\sin\varphi)\Gamma t\\&\quad+\frac{R_m^{-2}}{4}(x'^2+y'^2)(\Gamma t)^2\Big],\end{aligned}\tag{7.27}$$

其中

$$\begin{aligned}x'&=x\cos\delta+y\sin\delta,\\y'&=-x\sin\delta+y\cos\delta.\end{aligned}\tag{7.28}$$

类似地，有

$$\Gamma(D^0(t)\to K^-\pi^+)\propto |A_{K^-\pi^+}|^2\Big\{|g_+(t)|^2+|g_-(t)|^2|\lambda_{K^-\pi^+}|^2 + 2\mathrm{Re}[g_+^*(t)g_-(t)\lambda_{K^-\pi^+}]\Big\} \approx e^{-\Gamma t}|A_{K^-\pi^+}|^2, \tag{7.29}$$

$$\Gamma(\bar{D}^0(t)\to K^+\pi^-)\propto |\bar{A}_{K^+\pi^-}|^2\Big\{|g_+(t)|^2+|g_-(t)|^2|\lambda^{-1}_{K^+\pi^-}|^2 + 2\mathrm{Re}[g_-(t)g_+^*(t)\lambda^{-1}_{K^+\pi^-}]\Big\} \approx e^{-\Gamma t}|\bar{A}_{K^+\pi^-}|^2. \tag{7.30}$$

对 $D^0(\bar{D}^0)\to K^+K^-$，有

$$\lambda_{K^+K^-}=\frac{q}{p}\frac{\bar{A}(\bar{D}^0\to K^+K^-)}{A(D^0\to K^+K^-)}\approx\frac{q}{p}=R_m e^{i\varphi}. \tag{7.31}$$

(7.31)式的正确性可以如下说明：D^0，$\bar{D}^0\to K^+K^-$ 的费曼图如图 7.4 所示.

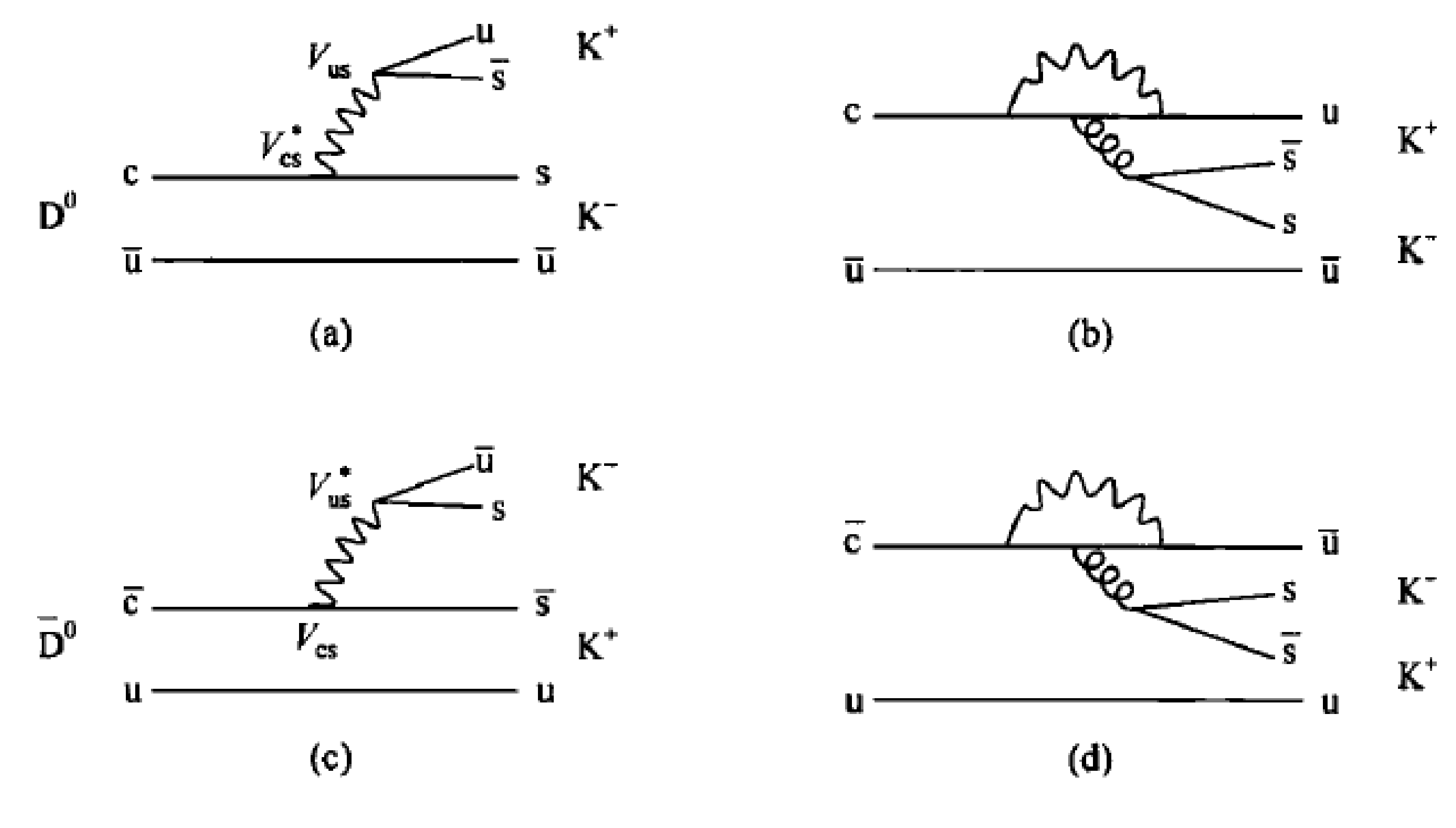


图 7.4 D^0，$\bar{D}^0\to K^+K^-$

从图 7.4 中看出，企鹅图的贡献可以忽略. 这样，$\bar{A}_{K^+K^-}$，$A_{K^+K^-}$ 都只有一个树图贡献，因此可只有一个强相位. 由于 $\eta_{CP}(K^+K^-)=+1$，并且 $CP|D^0\rangle=|\bar{D}^0\rangle$，与证明(6.84)式完全一样，若 CPT 不变成立，

$$A_{K^+K^-}=a_{K^+K^-}e^{i\delta_{K^+K^-}},\quad \bar{A}_{K^+K^-}=\bar{a}_{K^+K^-}e^{i\delta_{K^+K^-}},$$

则有

$$\bar{a}_{K^+K^-}=\eta_{CP}(K^+K^-)a^*_{K^+K^-}=a^*_{K^+K^-}=a_{K^+K^-}, \tag{7.32}$$

其中最后一步用了 CKM 矩阵 V_{us}，V_{cs} 均为实数[见(3.63)式]. 因此有

$$\bar{A}(\bar{D}^0\to K^+K^-)\approx A(D^0\to K^+K^-),$$

(7.31)式是正确的，即在定义 $CP|D^0\rangle=|\bar{D}^0\rangle$ 且假定 CPT 不变时，有 $\bar{A}(\bar{D}^0\to K^+K^-)=A(D^0\to K^+K^-)$，此时 $\lambda_{K^+K^-}=q/p=R_m e^{i\varphi}$. 但若规定 $CP|D^0\rangle=-|\bar{D}^0\rangle$，则(7.31)式前应有一个负号. 可以推出

$$\begin{aligned}\Gamma(D^0(t)\to K^+K^-)\propto&|A_{K^+K^-}|^2\Big\{|g_+(t)|^2+|g_-(t)|^2|\lambda_{K^+K^-}|^2\\&+2\mathrm{Re}[g_+^*(t)g_-(t)\lambda_{K^+K^-}]\Big\}\\\approx&\,e^{-\Gamma t}|A_{K^+K^-}|^2\Big[1-R_m(y\cos\varphi-x\sin\varphi)\Gamma t\\&+\frac{1}{4}R_m^2(x^2+y^2)(\Gamma t)^2\Big],\end{aligned}\tag{7.33}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\bar{D}^0(t)\to K^+K^-)\propto&|\bar{A}_{K^+K^-}|^2|p/q|^2\Big\{|g_-(t)|^2+|g_+(t)|^2|\lambda_{K^+K^-}|^2\\&+2\mathrm{Re}[g_-^*(t)g_+(t)\lambda_{K^+K^-}]\Big\}\\\approx&\,e^{-\Gamma t}|\bar{A}_{K^+K^-}|^2\Big[1-R_m^{-1}(y\cos\varphi+x\sin\varphi)\Gamma t\\&+\frac{1}{4}R_m^{-2}(x^2+y^2)(\Gamma t)^2\Big].\end{aligned}\tag{7.34}$$

把上面的公式小结一下：

$$\begin{aligned}\Gamma(D^0(t)\to K^+\pi^-)=&\,e^{-\Gamma t}|\bar{A}_{K^-\pi^+}|^2\Big[R+\sqrt{R}R_m(y'\cos\varphi-x'\sin\varphi)\Gamma t\\&+\frac{1}{4}R_m^2(x'^2+y'^2)(\Gamma t)^2\Big],\\\Gamma(\bar{D}^0(t)\to K^-\pi^+)=&\,e^{-\Gamma t}|A_{K^-\pi^+}|^2\Big[R+\sqrt{R}R_m^{-1}(y'\cos\varphi+x'\sin\varphi)\Gamma t\\&+\frac{1}{4}R_m^{-2}(x'^2+y'^2)(\Gamma t)^2\Big],\\\Gamma(D^0(t)\to K^+K^-)=&\,e^{-\Gamma t}|A_{K^+K^-}|^2[1-R_m(y\cos\varphi-x\sin\varphi)\Gamma t],\\\Gamma(\bar{D}^0(t)\to K^+K^-)=&\,e^{-\Gamma t}|\bar{A}_{K^+K^-}|^2[1-R_m^{-1}(y\cos\varphi+x\sin\varphi)\Gamma t],\\\Gamma(D^0(t)\to K^-K^+)=&\,\Gamma(\bar{D}^0(t)\to K^+\pi^-)=e^{-\Gamma t}|A_{K^-\pi^+}|^2.\end{aligned}\tag{7.35}$$

在(7.35)式中我们已做了进一步的近似. 注意，$R\ll\sqrt{R}\ll1$，$|x|$，$|y|\ll1$，$R_m\sim O(1)$，所以(7.35)式是在合理近似下给出的.

下面就可以讨论实验上测量的物理量了.

7.2.2　混合参数的测量结果

实验上称 Cabibbo 双压低过程 $D^0\to K^+\pi^-$ 为"错号"[wrong sign(WS)]过程，

称 $D^0 \to K^- \pi^+$ Cabibbo favored 过程为"对号"[right sign(RS)]过程.

如果不考虑 CP 破坏且混合很小($|x|,|y| \ll 1$),则(7.35)前两式中的 $R_m=1$, $\varphi=0$,这样有

$$\Gamma(D^0(t) \to K^+\pi^-) \propto e^{-\Gamma t}\left[R+\sqrt{R}y'\Gamma t+\frac{x'^2+y'^2}{4}(\Gamma t)^2\right]. \tag{7.36}$$

这即文献[7]中的公式(1),其中第一项 R 为 DCS/CF 几率比,第三项为 D^0-$\bar{D}^0$ 混合项,第二项为混合与衰变的干涉项.

BaBar 实验组测量了 WS 事例按固有时间 t 的分布[7],用(7.36)式去拟合测得的分布而抽取出

$$\begin{aligned} y' &= (9.7 \pm 4.4 \pm 3.1) \times 10^{-3}, \\ x'^2 &= (-0.22 \pm 0.30 \pm 0.21) \times 10^{-3}, \\ R &= (3.03 \pm 0.16 \pm 0.10) \times 10^{-3}. \end{aligned} \tag{7.37}$$

以上结果与无混合(no mixing)假设偏离 3.9 σ.

Belle 实验组通过测量 $D^0(\bar{D}^0) \to K^+K^-, \pi^+\pi^-, K\pi$ 的衰变时间分布来抽取 y_{CP} 和 A_Γ[9]. 先看这两个量的定义. 由(7.35)式,在 $|x|,|y| \ll 1$ 条件下,有

$$\begin{aligned} \Gamma(D^0(t) \to K^+K^-) &\propto e^{-\Gamma t}[1-R_m(y\cos\varphi - x\sin\varphi)\Gamma t] \\ &\approx e^{-\Gamma t[1+R_m(y\cos\varphi - x\sin\varphi)]} \\ &= e^{-t/\tau_{K^+K^-}}, \end{aligned} \tag{7.38}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{D}^0(t) \to K^+K^-) &\propto e^{-\Gamma t}[1-R_m^{-1}(y\cos\varphi + x\sin\varphi)\Gamma t] \\ &\approx e^{-\Gamma t[1+R_m^{-1}(y\cos\varphi + x\sin\varphi)]} \\ &= e^{-t/\bar{\tau}_{K^+K^-}}, \end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\Gamma(\bar{D}^0(t) \to K^-\pi^+) \propto e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau_{K^-\pi^+}}, \tag{7.40}$$

其中 $\tau_{K^+K^-}, \bar{\tau}_{K^+K^-}, \tau_{K^-\pi^+}$ 称为有效寿命(effective lifetime). 它们可以通过衰变率的指数分布 $e^{-t/\tau}$ 来抽取出来. 但它们并非真正的相应衰变道的寿命,因为相应衰变道的分宽度还有许多乘子如 $|A_{KK}|^2$、相空间等被扔掉了.

(7.38)~(7.40)式中的有效宽度为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{K^+K^-}} &= \Gamma[1+R_m(y\cos\varphi - x\sin\varphi)], \\ \frac{1}{\bar{\tau}_{K^+K^-}} &= \Gamma[1+R_m^{-1}(y\cos\varphi + x\sin\varphi)], \\ \frac{1}{\tau_{K^-\pi^+}} &= \Gamma. \end{aligned} \tag{7.41}$$

定义

$$y_{CP}=\frac{\tau_{K^-\pi^+}}{\langle\tau_{K^+K^-}\rangle}-1,\tag{7.42}$$

$$A_\Gamma=\frac{\bar{\tau}_{K^+K^-}-\tau_{K^+K^-}}{\bar{\tau}_{K^+K^-}+\tau_{K^+K^-}},\tag{7.43}$$

其中

$$\langle\tau_{K^+K^-}\rangle=\frac{1}{2}(\tau_{K^+K^-}+\bar{\tau}_{K^+K^-}),\tag{7.44}$$

由(7.41)～(7.44)式，可以推导出

$$\begin{aligned}y_{CP}&\approx\frac{1}{2}(R_m+R_m^{-1})y\cos\varphi-\frac{1}{2}(R_m-R_m^{-1})x\sin\varphi\\&=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{q}{p}\right|+\left|\frac{p}{q}\right|\right)y\cos\varphi-\frac{1}{2}\left(\left|\frac{q}{p}\right|-\left|\frac{p}{q}\right|\right)x\sin\varphi,\end{aligned}\tag{7.45}$$

$$\begin{aligned}A_\Gamma&=\frac{1/\tau_{K^+K^-}-1/\bar{\tau}_{K^-K^-}}{1/\bar{\tau}_{K^+K^-}+1/\tau_{K^-K^-}}\\&\approx\frac{1}{2}(R_m-R_m^{-1})y\cos\varphi-\frac{1}{2}(R_m+R_m^{-1})x\sin\varphi\\&=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{q}{p}\right|-\left|\frac{p}{q}\right|\right)y\cos\varphi-\frac{1}{2}\left(\left|\frac{q}{p}\right|+\left|\frac{p}{q}\right|\right)x\sin\varphi.\end{aligned}\tag{7.46}$$

实验上有时还测量 ΔY. 其定义为

$$\Delta Y=\frac{\tau_{K^-\pi^-}}{\langle\tau_{K^+K^-}\rangle}A_\Gamma.\tag{7.47}$$

实验上测出 $D^0,\bar{D}^0\to K\pi,K^+K^-,\pi^+\pi^-$ 衰变的时间分布并假定是指数衰减，从而抽取有效寿命[见(7.38)～(7.40)式]$\tau_{K^-\pi^+},\tau_{h^+h^-},\bar{\tau}_{h^+h^-}$,($h=\pi,K$)，然后就可由(7.42),(7.43),(7.47)式定出 $y_{CP},A_\Gamma,\Delta Y$. Belle 定出[9]

$$\begin{aligned}y_{CP}&=[1.31\pm0.32(\text{stat.})\pm0.25(\text{syst.})]\times10^{-2},\\A_\Gamma&=[0.01\pm0.30(\text{stat.})\pm0.15(\text{syst.})]\times10^{-2}.\end{aligned}\tag{7.48}$$

BaBar 给出[10]

	y_{CP}	ΔY
K^+K^-	$(1.60\pm0.46\pm0.17)\%$	$(-0.40\pm0.44\pm0.12)\%$
$\pi^+\pi^-$	$(0.46\pm0.65\pm0.25)\%$	$(0.05\pm0.64\pm0.32)\%$

(7.49)

由(7.28)式，当相位差 δ 不大时，则有

$$y'\approx y,\quad x'\approx x. \tag{7.50}$$

实际上，由混合诱导的 CP 破坏很小（目前还没观测到），这意味着 $|q/p|\approx 1$. 混合型 CP 破坏（CP violation in interference between mixing and decay）也很小，这表明 $\varphi\approx 0\left(\frac{q}{p}=\left|\frac{q}{p}\right|e^{i\varphi}\right)$. 因此由(7.45)式看出

$$y_{CP}\approx y. \tag{7.51}$$

7.2.3 在共振态 ψ(3770)上测混合参数

由 $\psi(3770)\to D^0\bar{D}^0$ 产生的 $D^0\bar{D}^0$ 几乎在阈上. 由于是强产生，因而末态 $D^0\bar{D}^0$ 有确定的 C 宇称($C=-1$). 角动量守恒导致 $D^0\bar{D}^0$ 总角动量 $J=L=1$. 因此 $D^0\bar{D}^0$ 为相干态. 其随时间的演化可写为

$$|D^0\bar{D}^0(t_1,t_2)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|D^0(\boldsymbol{k}_1,t_1)\rangle|\bar{D}^0(\boldsymbol{k}_2,t_2)\rangle-|\bar{D}^0(\boldsymbol{k}_1,t_1\rangle|D^0(\boldsymbol{k}_2,t_2)\rangle], \tag{7.52}$$

其中 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 为 D^0 或 $\bar{D}^0$ 的动量，t_1,t_2 为两个 D 介子各自从产生到衰变的时间差.

假定 $D^0(\boldsymbol{k}_1,t_1)$在 t_1 时刻衰变到 f_1，在另一方向 $\boldsymbol{k}_2=-\boldsymbol{k}_1$ 的 $\bar{D}^0(k_2,t_2)$在 t_2 时刻衰变到 f_2，则有

$$\begin{aligned}\langle f_1,f_2|H_w|D^0\bar{D}^0(t_1,t_2)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{&a_-[g_+(t_1)g_-(t_2)-g_+(t_2)g_-(t_1)]\\&+a_+[g_+(t_1)g_+(t_2)-g_-(t_1)g_-(t_2)]\},\end{aligned} \tag{7.53}$$

其中

$$\begin{aligned}a_-&=\frac{p}{q}A_{f_1}A_{f_2}(1-\lambda_{f_1}\lambda_{f_2}),\\a_+&=\frac{p}{q}A_{f_1}A_{f_2}(\lambda_{f_2}-\lambda_{f_1}),\end{aligned} \tag{7.54}$$

而

$$\lambda_{f_i}=\frac{q}{p}\frac{\bar{A}_{f_i}}{A_{f_i}},\quad i=1,2,$$

$g_\pm(t)$见(7.12)式.

由于 ψ(3770)衰变不可能测末态的时间(能量太低)，所以只能测时间积分的衰变率. 由(7.12)式计算出

$$G_+ = \int_0^\infty \mathrm{d}t\ |g_+(t)|^2 = \frac{2+x^2-y^2}{2\Gamma(1+x^2)(1-y^2)},$$

$$G_- = \int_0^\infty \mathrm{d}t\ |g_-(t)|^2 = \frac{x^2+y^2}{2\Gamma(1+x^2)(1-y^2)}, \tag{7.55}$$

$$G_{+-} = \int_0^\infty \mathrm{d}t[g_+^*(t)g_-(t)] = \frac{-y(1+x^2)-\mathrm{i}x(1-y^2)}{2\Gamma(1+x^2)(1-y^2)}.$$

利用(7.55)式可求出时间积分的衰变率

$$\Gamma(\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2) = \int_0^\infty \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ |\langle \mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2\ |\ H_\mathrm{w}\ |\ \mathrm{D}^0\overline{\mathrm{D}}^0(t_1,t_2)\rangle|^2$$
$$\approx |a_-|^2\frac{x^2+y^2}{4\Gamma^2}+|a_+|^2\frac{2}{4\Gamma^2}. \tag{7.56}$$

若 $\mathrm{f}_1=\mathrm{f}_2=\mathrm{K}^-\pi^+$，由(7.17)，(7.21)式可得

$$\lambda_{\mathrm{K}^-\pi^+} = \frac{q}{p}\frac{\overline{A}_{\mathrm{K}^-\pi^+}}{A_{\mathrm{K}^-\pi^+}} = -\sqrt{R}R_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta-\varphi)}. \tag{7.57}$$

显然，

$$a_+ = 0,$$

$$a_- = \frac{p}{q}A^2_{\mathrm{K}^-\pi^+}(1-\lambda^2_{\mathrm{K}^-\pi^+}).$$

注意到

$$R = |A_{\mathrm{K}^+\pi^-}/\overline{A}_{\mathrm{K}^+\pi^-}|^2 \ll 1 \qquad (\sim\lambda^4),$$

$$|a_-|^2 \approx |A_{\mathrm{K}^-\pi^-}|^4\left|\frac{p}{q}\right|^2, \tag{7.58}$$

则有

$$\Gamma(\mathrm{K}^-\pi^+,\mathrm{K}^-\pi^+) \propto \frac{x^2+y^2}{4\Gamma^2}|A_{\mathrm{K}^-\pi^+}|^4\left|\frac{p}{q}\right|^2. \tag{7.59}$$

若

$$\mathrm{f}_1 = \mathrm{K}^-\pi^+,\ \mathrm{f}_2 = \mathrm{K}^+\pi^-,$$

则有

$$|a_-|^2 = |A_{\mathrm{K}^-\pi^+}|^2|A_{\mathrm{K}^+\pi^-}|^2\left|\frac{p}{q}\right|^2|1-\lambda_{\mathrm{K}^-\pi^+}\lambda_{\mathrm{K}^+\pi^-}|^2.$$

(7.22)，(7.25)式给出

$$\lambda_{\mathrm{K}^-\pi^+}\lambda_{\mathrm{K}^+\pi^-} = \left[-\sqrt{R}R_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta-\varphi)}\frac{-R_\mathrm{m}}{\sqrt{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta+\varphi)}\right] = R_\mathrm{m}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}.$$

这时，

$$|a_-|^2 \approx |A_{K^-\pi^+}|^2 |A_{K^+\pi^-}|^2 \left|\frac{p}{q}\right|^2 2\left(1-\left|\frac{q}{p}\right|^2\cos 2\varphi\right),$$
$$|a_+|^2 = |A_{K^-\pi^+}|^2 |A_{K^+\pi^-}|^2 \left|\frac{p}{q}\right|^2 R^{-1} R_m^2$$
$$= |A_{K^-\pi^+}|^2 |A_{K^+\pi^-}|^2 \frac{1}{R}. \tag{7.60}$$

将

$$R = \left|\frac{A_{K^+\pi^-}}{\bar{A}_{K^+\pi^-}}\right|^2 = \left|\frac{A_{K^+\pi^-}}{A_{K^-\pi^+}}\right|^2$$

代入并利用(7.17)式

$$R_m = \left|\frac{q}{p}\right|,$$

有

$$|a_+|^2 = |A_{K^-\pi^+}|^4.$$

因 $x^2, y^2 \ll 1$，所以

$$\Gamma(K^-\pi^+, K^+\pi^-) \approx \frac{2}{4\Gamma^2} |A_{K^-\pi^+}|^4. \tag{7.61}$$

类似地，可以算出

$$\Gamma(K^+\pi^-, K^-\pi^+) \approx \Gamma(K^-\pi^+, K^+\pi^-), \tag{7.62}$$

$$\Gamma(K^+\pi^-, K^+\pi^-) \approx \frac{x^2+y^2}{4\Gamma^2} |A_{K^-\pi^+}|^4 \left|\frac{q}{p}\right|^2, \tag{7.63}$$

所以考虑到$|q/p| \approx 1$，则

$$\frac{\Gamma(K^\mp\pi^\pm, K^\mp\pi^\pm)}{\Gamma(K^\pm\pi^\mp, K^\mp\pi^\pm)} \approx \frac{x^2+y^2}{2}. \tag{7.64}$$

在 $\psi(3770)$共振峰上测量同号事例与异号事例之比，然后通过(7.64)式可给出对混合参数 x^2+y^2 的限制.

假定在 BEPCⅡ(BESⅢ)上积分亮度为 20 fb^{-1}，(7.64)式中测得的精度为

$$\frac{x^2+y^2}{2} \lesssim 10^{-4}.$$

在 $\psi(3770)$共振峰上我们还可通过 $K\pi$ 末态测强位相 δ. 实际上，定义

$$|D_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|D^0\rangle \pm |\bar{D}^0\rangle), \tag{7.65}$$

而

$$CP|D^0\rangle=|\bar{D}^0\rangle,$$

这样 D_+ 的 CP 宇称为正，D_- 的 CP 宇称为负. 这里我们忽略了 $D^0(\bar{D}^0)$ 衰变中的 CP 破坏.（因 CP 破坏极小）在实验上，如果略去 CP 破坏，则

$$\psi(3770)\to D^0\bar{D}^0\to(f_{CP})(K\pi). \tag{7.66}$$

末态 f_{CP} 是 CP 本征态，它可以标定是从 D_+ 还是 D_- 衰变而来. 若 $f_{CP}=(K^+K^-)$，$(\pi^+\pi^-)$，或 $K_s\pi^0$，则 CP 为正，这样只有一边是 $D_+\to f_{CP}$，而另一边一定是 $D_-\to K\pi$ 时 $\psi(3770)\to D_+D_-$ 才能发生. 注意 $\psi(3770)$ 有 $J^{PC}=1^{--}$，D_+D_- 相对角动量为 $L=1$，所以 $CP|D^+D^-\rangle=+1$. 这样利用 f_{CP} 末态来标定 $D_\pm$，则可测量 $D_\pm\to K\pi$ 的衰变宽度. 容易看出

$$\sqrt{2}A(D_\pm\to K^-\pi^+)=A(D^0\to K^-\pi^+)\pm\bar{A}(\bar{D}^0\to K^-\pi^+), \tag{7.67}$$

因而有

$$\sqrt{2}\frac{A(D_\pm\to K^-\pi^+)}{A(D^0\to K^-\pi^+)}=1\pm\frac{\bar{A}(\bar{D}^0\to K^-\pi^+)}{A(D^0\to K^-\pi^+)}. \tag{7.68}$$

由(7.21)，(7.23)，(7.24)式，得

$$\frac{\bar{A}(\bar{D}^0\to K^-\pi^+)}{A(D^0\to K^-\pi^+)}=\frac{\bar{A}_{K^-\pi^+}}{A_{K^-\pi^+}}=-\sqrt{R}e^{-i\delta_{K\pi}},$$
$$\delta_{K\pi}=\delta_{\bar{A}_{K^+\pi^-}}-\delta_{A_{K^+\pi^-}}=\delta_{A_{K^-\pi^+}}-\delta_{A_{K^-\pi^+}}. \tag{7.69}$$

代入(7.68)式两边取绝对值再平方，得

$$2\frac{\Gamma(D_\pm\to K^-\pi^+)}{\Gamma(D^0\to K^-\pi^+)}=\left|1\mp\sqrt{R}\,e^{-i\delta_{K\pi}}\right|^2\approx1\mp2\sqrt{R}\cos\delta_{K\pi}, \tag{7.70}$$

其中最后一步用了(7.37)式，即 $R\ll\sqrt{R}\ll1$. 因此，

$$\frac{\Gamma(D_-\to K^-\pi^+)-\Gamma(D_+\to K^-\pi^+)}{\Gamma(D_-\to K^-\pi^+)+\Gamma(D_+\to K^-\pi^+)}=2\sqrt{R}\cos\delta_{K\pi}. \tag{7.71}$$

测量 $D_\pm\to K^-\pi^+$ 的分支比就可由(7.71)式定出 $\delta_{K\pi}$（实际上是 $\cos\delta_{K\pi}$），然后由 x'，y' 定出 x,y.［见(7.28)式］

在 CLEO 和 BESⅢ上可做许多相干的 $D^0\bar{D}^0$ 分析. 如 $e^+e^-\to D^0\bar{D}^0$，$D^0\bar{D}^0\pi^0$ 为 $C=-1$ 态，而 $e^+e^-\to D^0\bar{D}^0\gamma$ 中 $D^0\bar{D}^0$ 的 C 宇称为 $C=+1$. 既可标定一个 $D^0(\bar{D}^0)$，也可将 D^0 和 $\bar{D}^0$ 都标定.

Heavy Flavor Averaging Group（HFAG）将世界各实验室已有的结果做整体拟合，并年年更新. 2011 年的结果为[11]

$$
\begin{aligned}
x &= (0.63^{+0.19}_{-0.26})\times 10^{-2},\\
y &= (0.75\pm 0.12)\times 10^{-2},\\
\delta_{K\pi} &= (22.4^{+9.7}_{-11.0})^{\circ},\\
|q/p| &= 0.89^{+0.17}_{-0.15},\\
\varphi &= (-10.1^{+9.4}_{-8.8})^{\circ}.
\end{aligned}
\tag{7.72}
$$

混合参数(x,y)偏离(0,0)点的显著性为 10.1 σ. 因此，可以说 D^0-$\bar{D}^0$ 混合已被实验所证实.

§ 7.3 在粲粒子衰变中寻找 *CP* 破坏

我们先讨论实验上两个最重要的衰变道 D→KK，Kπ. 由(7.42)，(7.43)式可知，y_{CP} 和 A_{Γ} 与上述两个衰变道有关. 由(7.45)式，

$$
y_{CP}\approx\frac{1}{2}\left(\left|\frac{q}{p}\right|+\left|\frac{p}{q}\right|\right)y\cos\varphi-\frac{1}{2}\left(\left|\frac{q}{p}\right|-\left|\frac{q}{p}\right|\right)x\sin\varphi.
$$

由(7.17)式，知

$$
\left|\frac{q}{p}\right|=R_{\rm m}e^{i\varphi}=\left|\frac{q}{p}\right|e^{i\varphi}.
$$

如果令

$$
R_{\rm m}=\left|\frac{q}{p}\right|=\left(\frac{1+A_{\rm M}}{1-A_{\rm M}}\right)^{\frac{1}{4}},\quad |A_{\rm M}|\ll 1,
$$

则

$$
\left|\frac{q}{p}\right|\approx 1+\frac{1}{2}A_{\rm M},\quad \left|\frac{p}{q}\right|\approx 1-\frac{1}{2}A_{\rm M}. \tag{7.73}
$$

因此 $A_{\rm M}\neq 0$ 表明有混合诱导的 *CP* 破坏(*CP* violation in mixing)，$\varphi\neq 0$ 表明有混合型的 *CP* 破坏(*CP* violation in interference between mixing and decay). 将(7.73)式代入(7.45)式，有

$$
y_{CP}\approx y\cos\varphi-A_{\rm M}x\sin\varphi. \tag{7.74}
$$

目前 y_{CP} 的世界平均值为[11]

$$
y_{CP}=(1.107\pm 0.217)\times 10^{-2}. \tag{7.75}
$$

与(7.72)式中的 y 值比较，并不能看出 y_{CP} 与 y 的差别，因而不能肯定 φ 和 $A_{\rm M}$ 是否为零，也就不能断定有无 *CP* 破坏.

由(7.46)，(7.73)式，有

$$A_\Gamma \approx \frac{1}{2} A_M y\cos\varphi - x\sin\varphi. \tag{7.76}$$

目前 A_Γ 的世界平均值为[11]

$$A_\Gamma = (0.123 \pm 0.248) \times 10^{-2}, \tag{7.77}$$

也完全看不出有 CP 破坏的迹象.

实际上,如果我们对(7.33),(7.34)式做时间积分,则有

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathrm{D}^0 \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-) &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \Gamma(\mathrm{D}^0(t) \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-) \\ &\propto \frac{1}{\Gamma}[1 - R_\mathrm{m}(y\cos\varphi - x\sin\varphi)], \end{aligned} \tag{7.78}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{\mathrm{D}}^0 \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-) &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \Gamma(\bar{\mathrm{D}}^0(t) \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-) \\ &\propto \frac{1}{\Gamma}[1 - R_\mathrm{m}^{-1}(y\cos\varphi + x\sin\varphi)]. \end{aligned} \tag{7.79}$$

时间积分的 CP 不对称性

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{\mathrm{CP}}(\mathrm{D}^0 \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-) &= \frac{\Gamma(\bar{\mathrm{D}}^0 \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-) - \Gamma(\mathrm{D}^0 \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)}{\Gamma(\bar{\mathrm{D}}_0 \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-) + \Gamma(\mathrm{D}^0 \to \mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)} \\ &\approx \frac{1}{2}(R_\mathrm{m} - R_\mathrm{m}^{-1})y\cos\varphi - \frac{1}{2}(R_\mathrm{m} + R_\mathrm{m}^{-1})x\sin\varphi \\ &= A_\Gamma \lesssim O(10^{-3}). \end{aligned} \tag{7.80}$$

可见,粲粒子衰变中的 CP 破坏很小,至今实验上还没有确实的证据.

对粲粒子衰变中 CP 破坏的理论方面的讨论还可参阅文献[12]和[13].

§7.4　粲粒子衰变中的直接 CP 破坏

在第四章的 4.5.3 节中,我们讨论了 CP 破坏的分类. 如果 $\mathrm{D}\to\mathrm{f}$ 和 $\bar{\mathrm{D}}\to\bar{\mathrm{f}}$ 衰变振幅的模不相等,即

$$|A(\mathrm{D}\to\mathrm{f})| \neq |\bar{A}(\bar{\mathrm{D}}\to\bar{\mathrm{f}})|, \tag{7.81}$$

则有直接 CP 破坏发生.

从§7.3 的讨论看出,由于 D^0-$\bar{\mathrm{D}}^0$ 混合很小,所以由混合诱导的 CP 破坏及混合与衰变干涉造成的 CP 破坏[即 4.5.3 节中的第(2),(3)类 CP 破坏]都会很小. 唯一有可能大一点的 CP 破坏就是直接 CP 破坏. 例如 $\mathrm{D}^0\to\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-$, $\mathrm{D}^0\to\pi^+\pi^-$, 其相应的衰变图如图 7.5 所示. 树图是 Cabibbo 一次压低的. U 旋分析给出[14]

$$\mathscr{A}_{CP}^{\text{dir}}(\mathrm{D}^0\to\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)=-\mathscr{A}_{CP}^{\text{dir}}(\mathrm{D}^0\to\pi^+\pi^-), \tag{7.82}$$

其中 $\mathscr{A}_{CP}^{\text{dir}}$ 表示直接 CP 破坏部分. 这里把总的 CP 不对称性 $\mathscr{A}_{CP}(\mathrm{f})$ 分解为三部分,

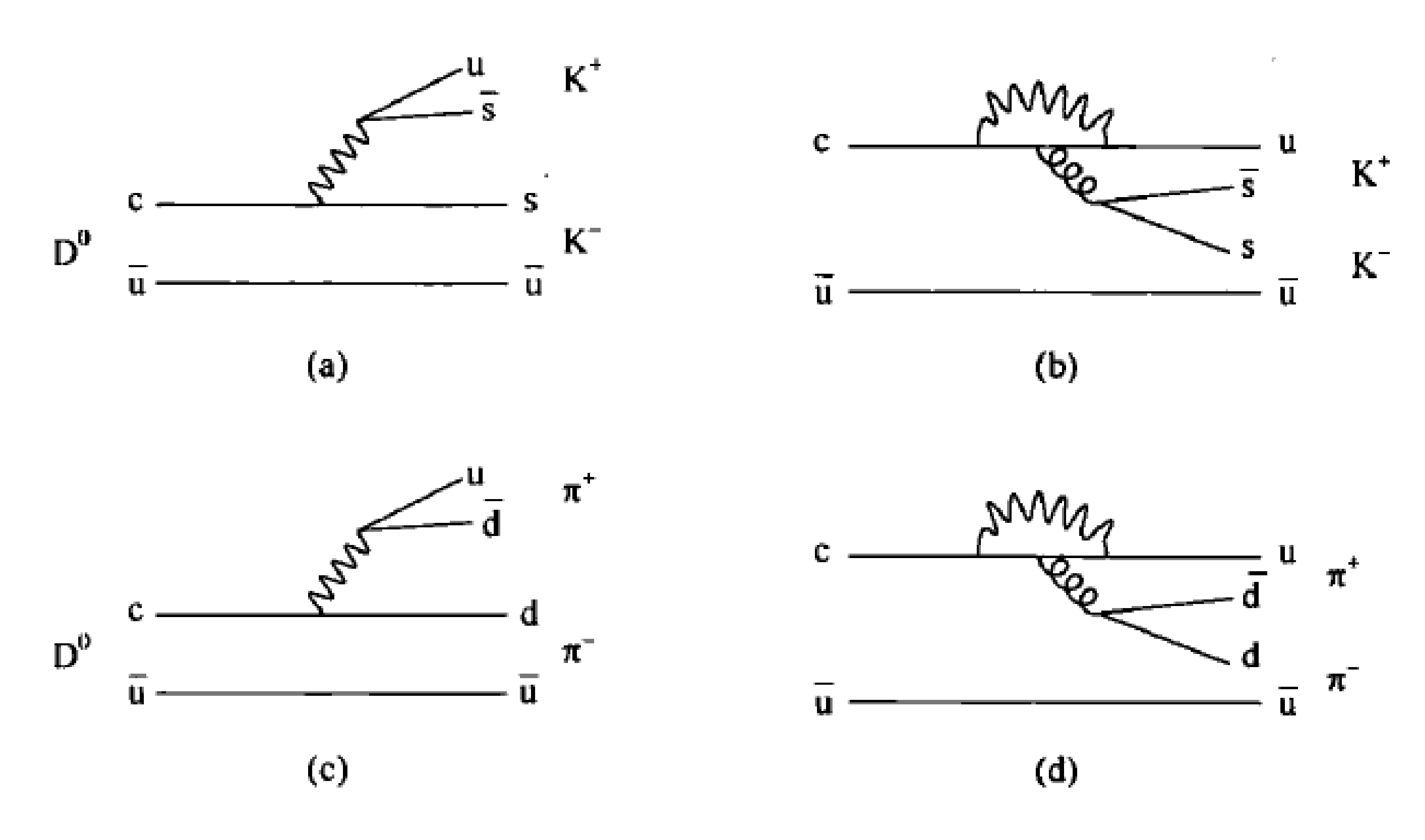


图 7.5 $\mathrm{D}^0\to\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-$, $\pi^+\pi^-$ 衰变图

$$\mathscr{A}_{CP}(f)=\frac{\Gamma(\mathrm{D}^0\to\mathrm{f})-\Gamma(\bar{\mathrm{D}}^0\to\mathrm{f})}{\Gamma(\mathrm{D}^0\to\mathrm{f})+\Gamma(\bar{\mathrm{D}}^0\to\mathrm{f})}=\mathscr{A}_{CP}^{\text{dir}}(\mathrm{f})+\mathscr{A}_{CP}^{\text{m}}(\mathrm{f})+\mathscr{A}_{CP}^{\text{i}}(\mathrm{f}), \tag{7.83}$$

其中 f 为 CP 本征态,上标 dir 表直接 CP 破坏,m 表示由混合诱导的 CP 破坏,i 表示由混合和衰变干涉产生的 CP 破坏.

文献[14]还指出,对 $\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-$, $\pi^+\pi^-$,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{CP}^{\text{m}}(\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)&=\mathscr{A}_{CP}^{\text{m}}(\pi^+\pi^-),\\ \mathscr{A}_{CP}^{\text{i}}(\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)&=\mathscr{A}_{CP}^{\text{i}}(\pi^+\pi^-),\end{aligned} \tag{7.84}$$

这样一来

$$\mathscr{A}_{CP}(\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)-\mathscr{A}_{CP}(\pi^+\pi^-)=\mathscr{A}_{CP}^{\text{dir}}(\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)-\mathscr{A}_{CP}^{\text{dir}}(\pi^+\pi^-)\approx 2\mathscr{A}^{\text{dir}}(\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-), \tag{7.85}$$

最后一步用了(7.82)式.

(7.82)式可能因 U 旋破坏而改变.

最近 LHCb 合作组测量了 $\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-$ 与 $\pi^+\pi^-$ 两过程 CP 不对称性的差[15],得到

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{A}_{CP}&=\mathscr{A}_{CP}(\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-)-\mathscr{A}_{CP}(\pi^+\pi^-)\\ &=[-0.82\pm0.21(\text{stat.})\pm0.11(\text{syst.})]\times10^{-2},\end{aligned} \tag{7.86}$$

其显著度为 3.5 σ. 考虑到(7.85)式,这可能预示着 Cabibbo 一次压低的过程 $\mathrm{D}^0\to\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-$, $\pi^+\pi^-$ 有较大的直接 CP 破坏,这对寻找新物理有重要意义. 当然 LHCb 的实验结果还有待进一步证实.

参考文献

[1] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 211802. Starič M, et al. (Belle Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 211803. Aaltonen T, et al. (CDF Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2008, 100: 121802.

[2] Datta A, Kumbhakar D. Z. Phys. C, 1985, 27: 515. Cheng H Y. Phys. Rev. D, 1982, 26: 143. Donoghue J F, Golowich E, Volencia G. Phys. Rev. D, 1986, 33: 1387.

[3] Petrov A A. Phys. Rev. D, 1997, 56: 1685.

[4] Georgi H. Phys. Lett. B, 1992, 297: 353.

[5] Bigi I I, Uraltsev N G. Nucl. Phys. B, 2001, 592: 92.

[6] Donoghue J F, Golowich E, Holstein B R, et al. Phys. Rev. D, 1986, 33: 179.

[7] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 211802.

[8] Bergmann S, Grossman Y, Ligeti Z, et al. Phys. Lett. B, 2000, 486: 418.

[9] Starič M, et al. (Belle Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 211803.

[10] Aubert B, et al. (BaBar Collaboration). Phys. Rev. D, 2008, 78: 011105(R).

[11] Schwartz A, et al. (HFAG). http://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag.

[12] Du D S. Phys. Rev. D, 1986, 34: 3428. Dai Y S, Du D S. Eur. Phys. J. C, 1999, 7: 525. Du D S. Eur. Phys. J. C, 2007, 50: 579.

[13] Li H B, Xing Z Z. BESⅢ Yellow Book: Part Ⅴ. arXiv:0809.1869. Xing Z Z. Phys. Rev. D, 1997, 55: 196.

[14] Grossman Y, Kagan A, Nir Y. Phys. Rev. D, 2007, 75: 036008.

[15] Charles M, et al. (LHCb Collaboration). LHCb-conf-2011-061. Aaij R, et al. (LHCb Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2012, 108: 111602.

第八章　中微子振荡和中微子系统的 *CP* 破坏

在§3.2中我们讨论了夸克的混合和混合矩阵 V_{CKM}，阐明了下(down)型夸克弱作用本征态即味本征态(flavor eigenstate)是质量本征态(d,s,b)的混合态. 此时三代夸克的带电流弱作用拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cc}}=\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}\,\bar{c}\,\bar{t})_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}V_{\mathrm{CKM}}\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}_{\mathrm{L}}W_{\mu}^{+}+h.\,c. \tag{8.1}$$

或

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cc}}=\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}\,\bar{c}\,\bar{t})_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}d'\\s'\\b'\end{pmatrix}_{\mathrm{L}}W_{\mu}^{+}+h.\,c.\,, \tag{8.2}$$

其中 $\begin{pmatrix}d'\\s'\\b'\end{pmatrix}=V_{\mathrm{CKM}}\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}$ 是弱作用本征态，并且是质量本征态 d,s,b 的混合态.

对轻子而言，如果只考虑三代$\begin{pmatrix}\nu_e\\e\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\nu_\mu\\\mu\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\nu_\tau\\\tau\end{pmatrix}$，则按(3.8)式，e，$\mu$，$\tau$ 相当于下型，对应 d，s，b 夸克，而 ν_e，ν_μ，ν_τ 是上(up)型，对应 u，c，t 夸克. 与夸克的混合不同，对轻子我们采用上型中微子混合来定义轻子混合矩阵. 当然，从物理上讲，用上型或下型混合是等价的. 对轻子而言用上型更方便.

在标准模型中，由于中微子只有左手分量，反中微子只有右手分量，因而中微子的狄拉克质量严格为零. 这导致不同味的轻子数分别守恒. 而三种质量都为零的中微子混合在物理上没有意义. 但近年来大气中微子$(\nu_\mu,\bar{\nu}_\mu)$和太阳中微子$(\nu_e,\bar{\nu}_e)$的实验证明，中微子是有质量的，且三种中微子的质量不同. 这样一来标准模型必须扩充，中微子必然有混合，轻子数也不再守恒.

与夸克类似，标准模型轻子带电流相互作用拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cc}}=\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}\,\bar{\mu}\,\bar{\tau})_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}\nu_e\\\nu_\mu\\\nu_\tau\end{pmatrix}_{\mathrm{L}}W_{\mu}^{-}+h.\,c.\,, \tag{8.3}$$

这里我们选了特殊的基. 在这个基下，荷电轻子弱作用本征态，即味本征态(flavor eigenstate)和质量本征态(mass eigenstate)是相同的.

如果中微子有质量，则在这一基下中微子味本征态(ν_e,ν_μ,ν_τ)与质量本征态

(ν_1,ν_2,ν_3)不会重合. 这样,我们可以把二者的关系写成

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_{e1} & U_{e2} & U_{e3}\\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3}\\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

(8.4)及(8.3)式都是用场算符写出的公式,如果用态矢量$|\nu_\alpha\rangle$,$|\nu_i\rangle$表示,则要注意到 $\nu_\alpha^\dagger(x)$作用到真空上,即

$$\nu_\alpha^\dagger(x)|0\rangle=|\nu_\alpha\rangle$$

才能产生态矢量$|\nu_\alpha\rangle$,因而(8.4)式用态矢量写出为

$$\begin{aligned}|\nu_\alpha\rangle &= \sum_i U_{\alpha i}^* \ |\nu_i\rangle,\\ |\nu_i\rangle &= \sum_\alpha U_{\alpha i} \ |\nu_\alpha\rangle,\end{aligned} \tag{8.5}$$

其中矩阵

$$U=\begin{pmatrix}U_{e1} & U_{e2} & U_{e3}\\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3}\\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3}\end{pmatrix} \tag{8.6}$$

是幺正矩阵,满足$U^\dagger U=UU^\dagger=1$. 这是为保证轻子味守恒,即 ν_α 通过带电流与靶物质作用总是产生 $l_\alpha(\alpha=e,\mu,\tau)$. 矩阵 U 被称为 Maki-Nakagawa-Sakata(MNS)轻子混合矩阵[1].

以后我们将给出它的具体形式.

§8.1 中微子振荡(混合)的实验证据

现在已有四种不同的实验证明中微子有振荡. 这四种实验即大气中微子振荡、加速器中微子振荡、太阳中微子振荡和反应堆中微子振荡. 现简述如下.

8.1.1 大气中微子振荡

如果假定只有两种中微子,例如 ν_μ,ν_τ,则(8.5),(8.6)式变得很简单:

$$\begin{aligned}\nu_\mu &=\nu_1\cos\theta+\nu_2\sin\theta,\\ \nu_\tau &=-\nu_1\sin\theta+\nu_2\cos\theta.\end{aligned} \tag{8.7}$$

在真空中可以导出[1],当 $\nu_\alpha(\alpha=\mu,\tau)$飞行距离 L 时变为 ν_β 的几率为

$$P(\nu_\alpha\to\nu_\beta)=\sin^2 2\theta\sin^2\left(1.27\,\frac{\Delta m^2}{E}L\right), \tag{8.8}$$

其中 $\Delta m^2 = m_{\nu_\tau}^2 - m_{\nu_\mu}^2$ (以 eV^2 为单位),飞行距离 L 以 km 为单位,中微子能量 E 以 GeV 为单位. ν_α 飞行距离 L 后还是 ν_α 的几率为

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\alpha) = 1 - P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 (1.27 \frac{\Delta m^2}{E} L). \tag{8.9}$$

以上公式我们在§8.2中将仔细讨论及推导.

公式(8.8)和(8.9)对 $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ 的振荡在真空中和物质中都适用,但对涉及 ν_e 的振荡,两公式在真空中可用,在物质中用要稍加修改. 这点在§8.2中再讨论.

大气中微子振荡最早是1998年在日本的地下实验室 Super-Kamiokande(SK)探测器上观测到的[2]. 该探测器是一个具有盛装50000 t 水的柱形容器,器壁上由10000多个光电倍加管覆盖的切连科夫探测器. 宇宙线在地球大气中产生的中微子(反中微子) $\nu_e(\bar{\nu}_e)$, $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 从四面八方射入 SK 探测器中. 如果中微子没有振荡发生,则每种味道的中微子从不同方向上入射和出射 SK 探测器的事例数应当是球对称的. 特别是从 SK 探测器中观测到的下行中微子事例与上行的(穿过地球的)中微子事例数应当相等. 但 SK 观测的结果显示,对 $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ 来说,下行和上行事例数几乎相等,而对 $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 事例则有明显的不同. 令垂直于 SK 的方向为 z 轴,极角为 Θ,注意到 SK 内反应过程为

$$\nu_\alpha(\bar{\nu}_\alpha) + \mathrm{N} \to \mathrm{l}_\alpha(\bar{\mathrm{l}}_\alpha) + \mathrm{X},$$

其中 α 代表 e, μ,而 $\mathrm{l}_\alpha(\bar{\mathrm{l}}_\alpha)$ 则为与 $\nu_\alpha(\bar{\nu}_\alpha)$ 相应的同味轻子(反轻子). 我们称 $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ 事例为e-like 事例, $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 事例为 μ-like 事例. 用 $U(-1<\cos\Theta<-0.2)$ 表示上行事例数, $D(0.2<\cos\Theta<1)$ 表示下行事例数,SK 测得的结果为[3]:对几个 GeV 的 e-like 事例,上行与下行事例比

$$\frac{U_e}{D_e} = 0.961^{+0.086}_{-0.079} \pm 0.016, \tag{8.10}$$

对单环(single-ring)几个 GeV 的 μ-like 事例,上、下行事例之比

$$\frac{U_\mu}{D_\mu} = 0.551^{+0.035}_{-0.033} \pm 0.004. \tag{8.11}$$

这里单环指 SK 内单个切连科夫光环事例. (8.11)式的结果可用 $\nu_\mu \to \nu_\tau$ 的振荡来圆满解释,而不能用 $\nu_\mu \to \nu_e$,或 $\nu_\mu \to \nu_s$[惰性中微子(sterile neutrino)]来解释.

SK 还测量了 $\nu_\mu \to \nu_\tau$ 的几率 $P(\nu_\mu \to \nu_\tau)$[称为失踪几率(disappearance probability]与 L/E 的关系曲线. 图8.1给出了实验值与假定无振荡的 Monte Carlo 模拟值之比与 L/E 的关系[4]. 显然,只有 $\nu_\mu \to \nu_\tau$ 振荡假设才能给出实验显示的低谷.

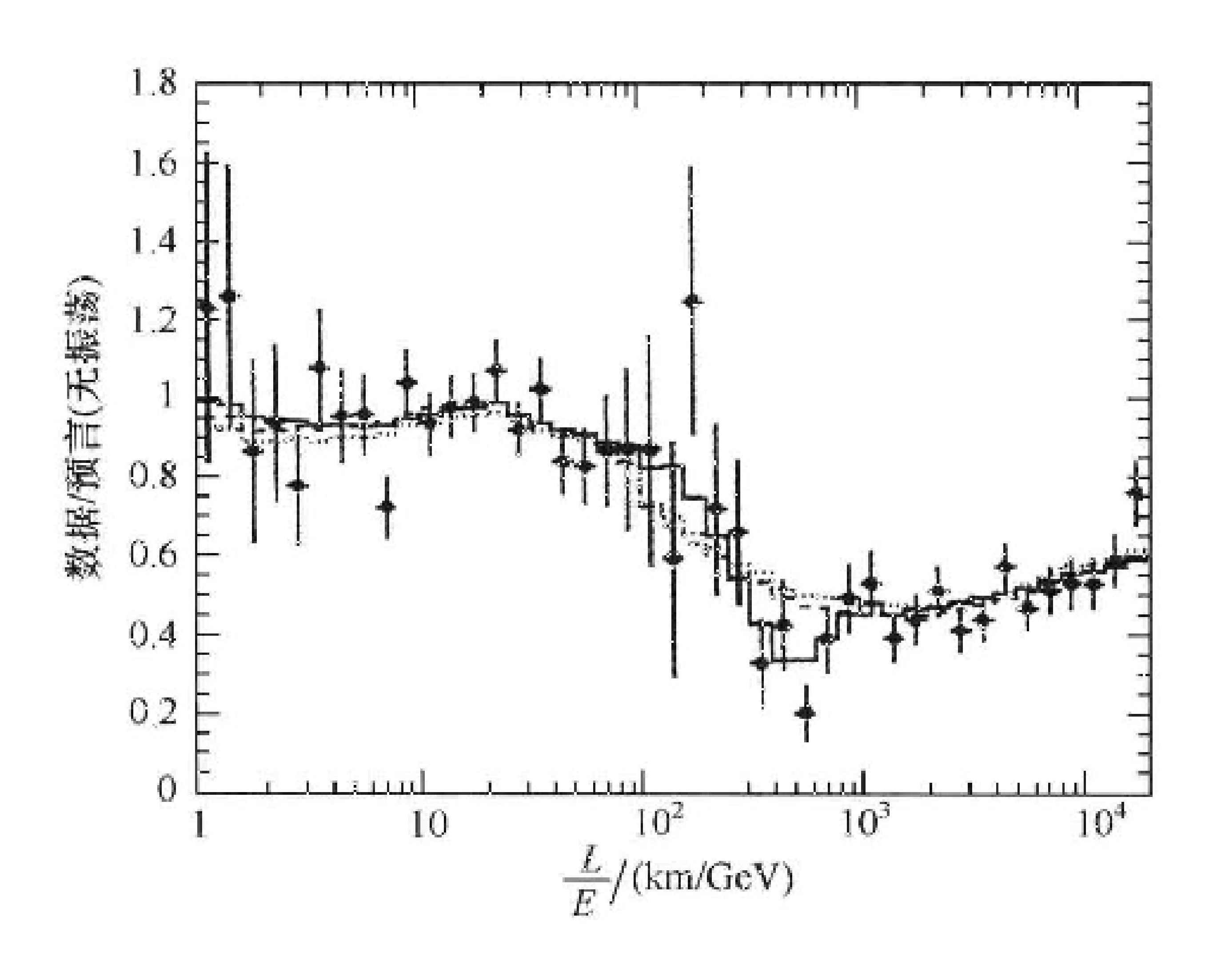


图 8.1

黑点实验值和 Monte Carlo 值(无振荡)之比与 L/E 的关系,实线为 $\nu_\mu \to \nu_\tau$ 的最佳拟合,虚线是中微子衰变模型的最佳期望值,点线是中微子退相干模型的最佳期望值

按 $\nu_\mu \to \nu_\tau$ 振荡给出的拟合实验的曲线(图 8.1)可得出对 Δm^2 及 $\sin^2 2\theta$ 的限制,结果为

$$1.9\times10^{-3}<|\Delta m^2|<3.0\times10^{-3}\,\mathrm{eV}^2,\quad \sin^2 2\theta>0.9,$$

置信度为 90%.

8.1.2 加速器中微子振荡

上一小节提到了大气中微子 ν_μ 失踪(disappearance)实验可归结为 $\nu_\mu \to \nu_\tau$ 的振荡.这种失踪也应当在加速器产生的 ν_μ 经长距离飞行后观测到.这就是长基线(long-baseline)中微子实验.已观测到 ν_μ 失踪的实验有两个.一是 K2K[5],其 ν_μ 束流由日本的 KEK 加速器产生后在 $L=250$ km 处的 Super-Kamiokande 探测器观测,另一个是 MINOS[6],ν_μ 在美国费米实验室的加速器上产生,飞行 735km 后在美国明尼苏达的苏丹(Soudan)铁矿井下的量能器中被探测.两个实验都观测到了 ν_μ 束流在飞行 250km 和 735km 后有减少,而且都可以用 $\nu_\mu \to \nu_\tau$ 的振荡来解释.

图 8.2 给出了 MINOS 实验对 Δm^2,$\sin^2 2\theta$ 的限制[7].在同一图中还列出了 Super-Kamiokande 大气中微子实验和 K2K 的实验给出的限制曲线.MINOS 最佳拟合给出

$$|\Delta m^2|=2.43\times10^{-3}\ \mathrm{eV}^2,\quad \sin^2 2\theta=1.0.$$

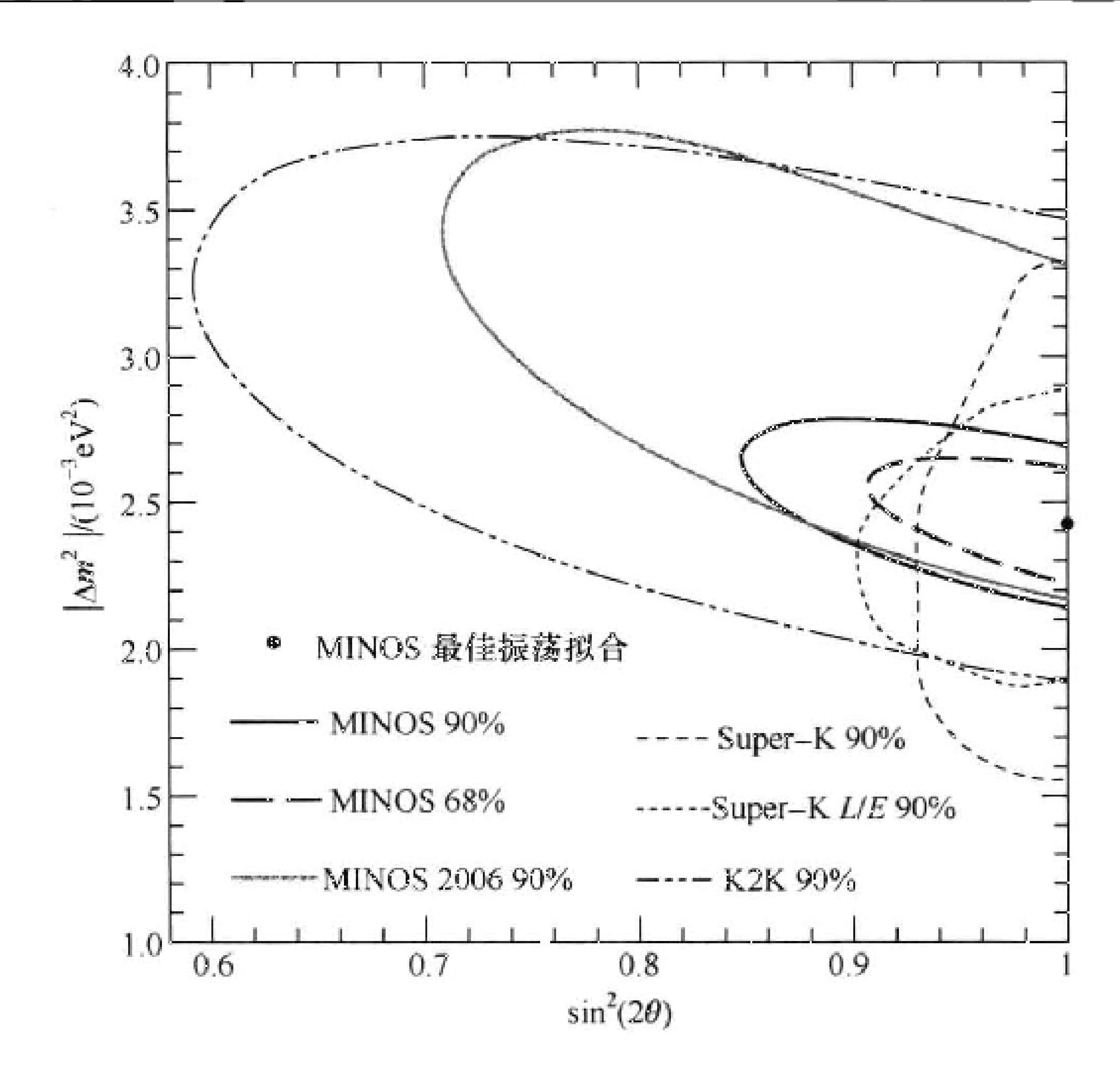


图 8.2 2008 年 MINOS 数据振荡拟合曲线

图中还列了 Super-K 和 K2K 的数据拟合曲线

8.1.3 太阳中微子振荡

太阳中微子 ν_e 失踪问题的实验研究已经有约 30 年的历史. 最早是在 Homestake 矿井(美国南达科他州)内[8]用 $\nu_e+{}^{37}\text{Cl}\to{}^{37}\text{Ar}+e^-$ 探测 ν_e,后来有 GALLEX 和 GNO(意大利山洞 Gran Sasso)及 SAGE(俄罗斯)用 $\nu_e+{}^{71}\text{Ga}\to{}^{71}\text{Ge}+e^-$ 来探测 ν_e[9]. 这些实验发现,地球上接收到的太阳中微子 ν_e 比用标准太阳模型(SSM)[10]预言的 ν_e 通量要小很多.

比较决定性的实验是由 SNO[加拿大萨德伯里中微子观测站(Sudbury Neutrino Observatory in Canada)]合作组做出的[11]. 实验用太阳 ^{8}B 中微子(能量为 6~7 MeV)来测量 ν_e 与重水通过三种相互作用,即带电流相互作用(CC)、中性流相互作用(NC)和弹性散射(ES)给出的 ν_e 通量. 其中 CC 作用过程为

$$\nu_e+D\to e^-+p+p,$$

NC 过程为

$$\nu_\alpha+D\to\nu_\alpha+p+n,$$

ES 过程为

$$\nu_\alpha+e^-\to\nu_\alpha+e^-,$$

α 代表 e,μ,τ. 如果没有中微子振荡,即太阳产生的 ^{8}B 中微子 ν_e 的通量到达 SNO 探测器时没变,显然通过 CC,NC,ES 三种过程测出来的都应该相同,并且都应和由标准太阳模型算出的值相等. 但实验测出的并非如此. 注意:CC 事例只能测 ν_e 通量 ϕ_e;NC 事例 ν_e,ν_μ,ν_τ 通量都可测,且 NC 相互作用与味无关,即 $P_{NC}=\phi_e+\phi_{\mu\tau}$,其中 $\phi_{\mu\tau}$ 表示 ν_μ,ν_τ 通量之和;而 ES 事例也应是 ν_e,ν_μ,ν_τ 总和,但 ν_μ,ν_τ 与物质的弹性散射截面比 ν_e 小,压低因子约为 $\sigma_\mu/\sigma_e\approx 0.155$. 因此有

$$\phi_{CC}=\phi_e,\quad \phi_{NC}=\phi_e+\phi_{\mu\tau},\quad \phi_{ES}=\phi_e+\frac{\sigma_\mu}{\sigma_e}\phi_{\mu\tau}\approx\phi_e+0.155\phi_{\mu\tau}. \tag{8.12}$$

SNO 测量结果为[12]

$$\phi_{CC}^{SNO}=1.68\pm0.06(\text{stat.})^{+0.08}_{-0.09}(\text{syst.})\times10^6\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \tag{8.13}$$

$$\phi_{ES}^{SNO}=2.35\pm0.02(\text{stat.})\pm0.15(\text{syst.})\times10^6\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \tag{8.14}$$

$$\phi_{NC}^{SNO}=4.94\pm0.21(\text{stat.})^{+0.38}_{-0.34}(\text{syst.})\times10^6\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}. \tag{8.15}$$

ϕ_{NC}^{SNO} 应当是标准太阳模型算出的 ν_e 总通量.(因 ν_e 到达地球过程中转化到 ν_μ,ν_τ 的通量也包括在内了)因此,ϕ_{NC}^{SNO} 测量值(8.15)式是对标准太阳模型的检验. 令人欣慰的是,(8.15)式中 ϕ_{NC}^{SNO} 的值与标准太阳模型(SSM)的预言一致[10]. [SSM 预言 $\phi_{\nu_e}^{SSM}=(5.05^{+1.01}_{-0.81}(\text{syst.})\times10^6\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1})$]图 8.3 给出了 $\nu_\mu+\nu_\tau$ 通量与 ν_e 通量的关系. 数据完全可以用 $\nu_e\to\nu_\mu,\nu_e\to\nu_\tau$ 振荡来解释.

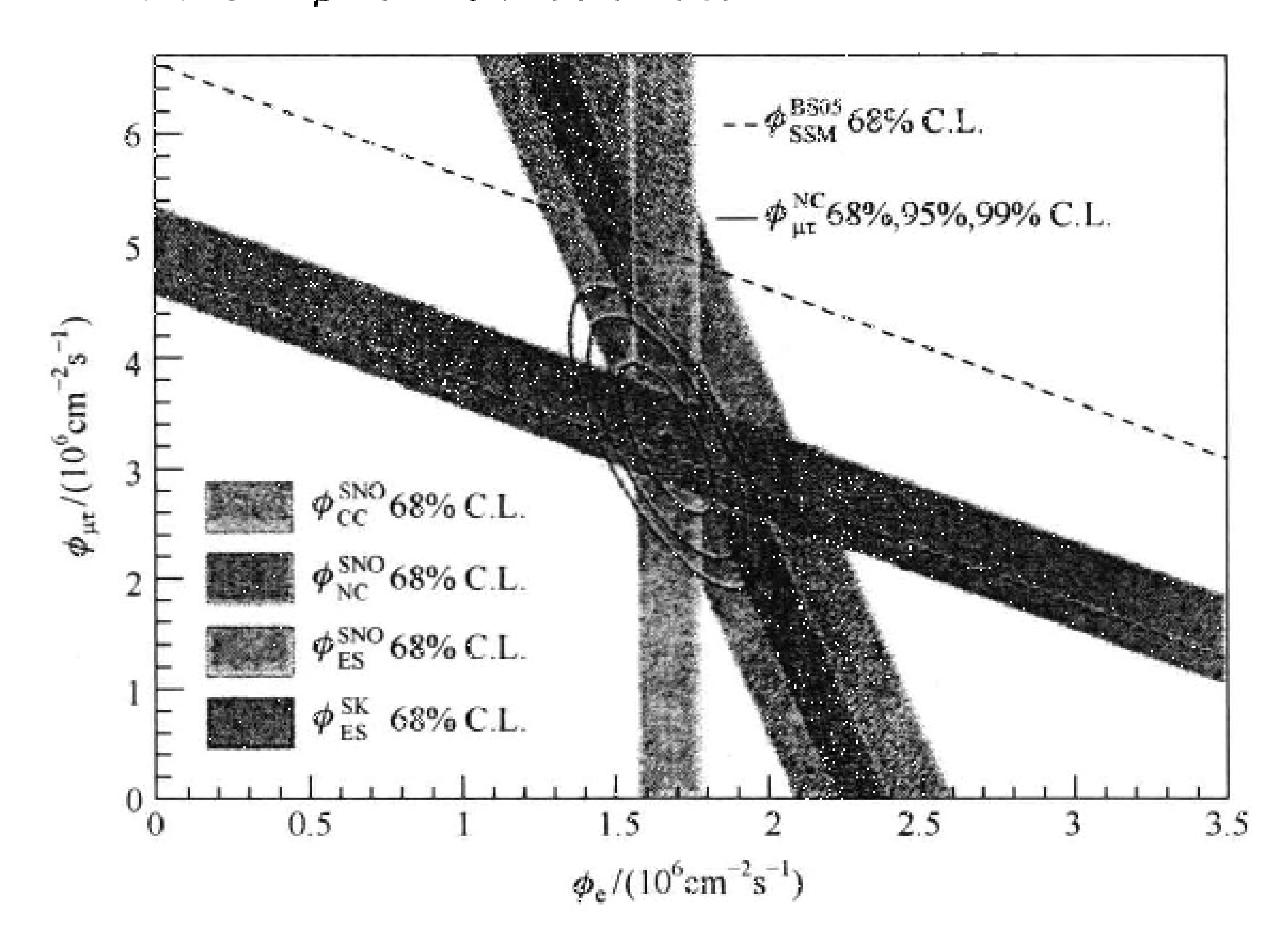


图 8.3　$\phi_{\mu\tau}$ 和 ϕ_e 的关系图

虚线包围的宽带为 SSM 预言的 ν_e 通量[13],与其平行的窄带是 SNO 测量的 NC 通量. 在垂直方向的窄带为 ϕ_{CC}^{SNO},稍斜一点的窄带为 ϕ_{ES}^{SNO},其中间的窄带为 Super-K 的 ϕ_{ES}^{SK}

由(8.12)~(8.15)式可以导出 $\phi_{\mu\tau}$ 的值,

$$\phi_{\mu\tau}=(3.26\pm0.25^{+0.40}_{-0.35})\times10^{6}\,\mathrm{cm^{-2}s^{-1}}. \qquad (8.16)$$

(8.16)式中 $\phi_{\mu\tau}\neq0$,这说明太阳中微子 ν_e 在到地球的路上确实有一部分振荡转化到了 ν_μ,ν_τ,所以太阳中微子 ν_e 会减少.

8.1.4 反应堆中微子振荡

KamLAND 是由放置在日本神冈(Kamiokande)矿井内的 1000 t 超纯液体闪烁体组成的中微子探测器,目标是测量由日本核反应堆中放出的 $\bar{\nu}_e$ 中微子. $\bar{\nu}_e$ 通量加权平均距离约为 180 km.

KamLAND 通过 $\bar{\nu}_e+p\to e^++n$ 来测量反应堆放出的 $\bar{\nu}_e$ 存活的几率 $P(\bar{\nu}_e\to\bar{\nu}_e)$[14]. 图 8.4 给出了实验曲线,其纵坐标为 $\bar{\nu}_e$data 减去本底再减去 Geo $\bar{\nu}_e$ 与无振荡时 $\bar{\nu}_e$ 谱之比,横坐标为 L_0/E,L_0 为 ν_e 通量加权平均的基线距离(180 km). 这里 Geo $\bar{\nu}_e$ 是指地球上重放射元素衰变时产生的 $\bar{\nu}_e$ 本底.

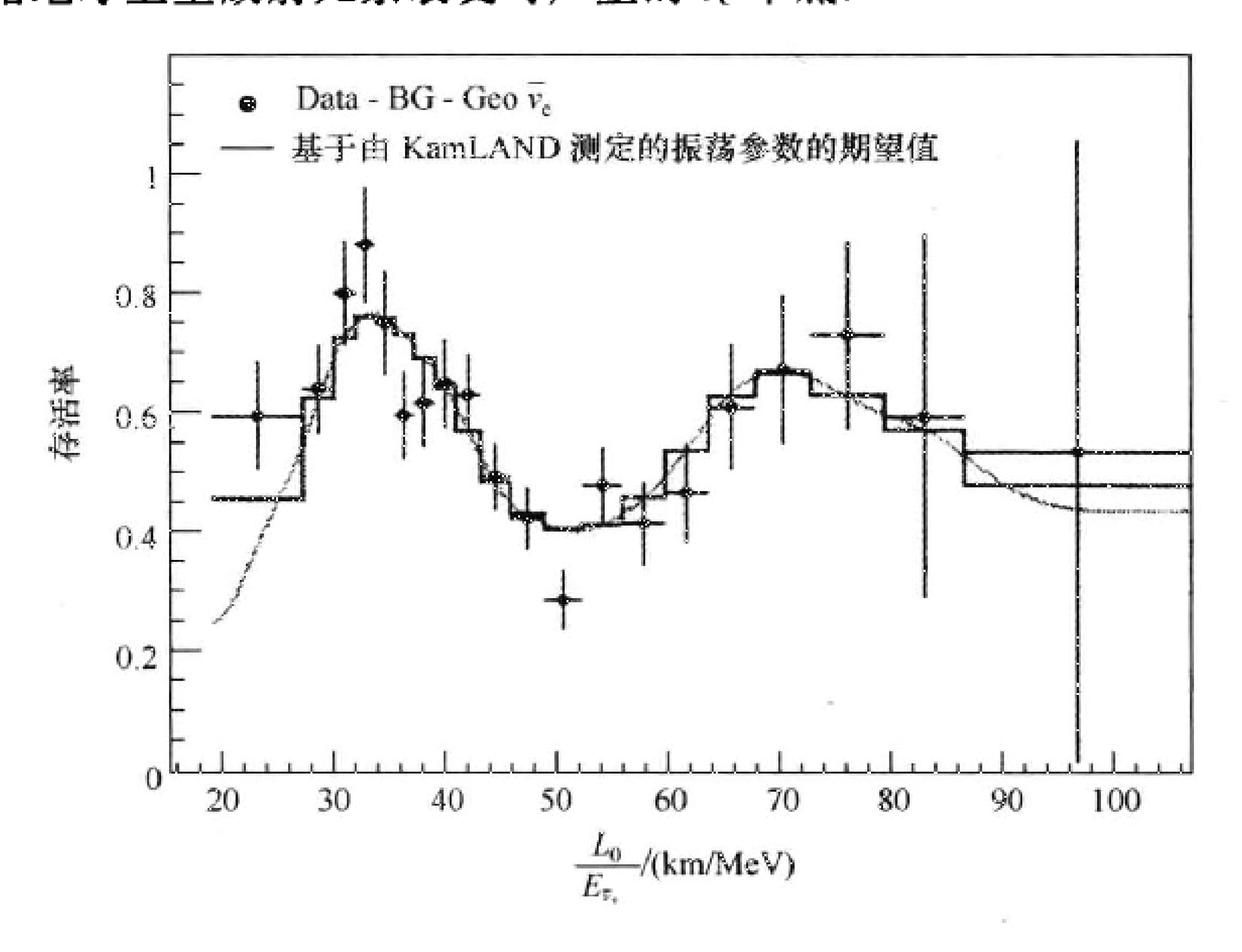


图 8.4 (Data-BG-Geo-$\bar{\nu}_e$)/$\bar{\nu}_e$谱(无振荡)与 L_0/E_{ν_e} 关系曲线

图 8.4 有明显的 $\sin^2\left(1.27\dfrac{\Delta m^2}{E}L\right)$特性,即在 CPT 不变时(8.9)式给出的特性,并且完全可由 $\bar{\nu}_e\to\bar{\nu}_\mu$ 振荡来解释.

拟合曲线给出

$$\Delta m^2_{\odot}=(7.59\pm0.21)\times10^{-5}\,\mathrm{eV}^2,\quad \tan^2\theta_{\odot}=0.47^{+0.06}_{-0.05}. \qquad (8.17)$$

如果把太阳中微子数据与 KamLAND 反应堆数据画在一个图上,也可得到大混合


角(LMA)解(8.17)式,这可参阅图 8.5.

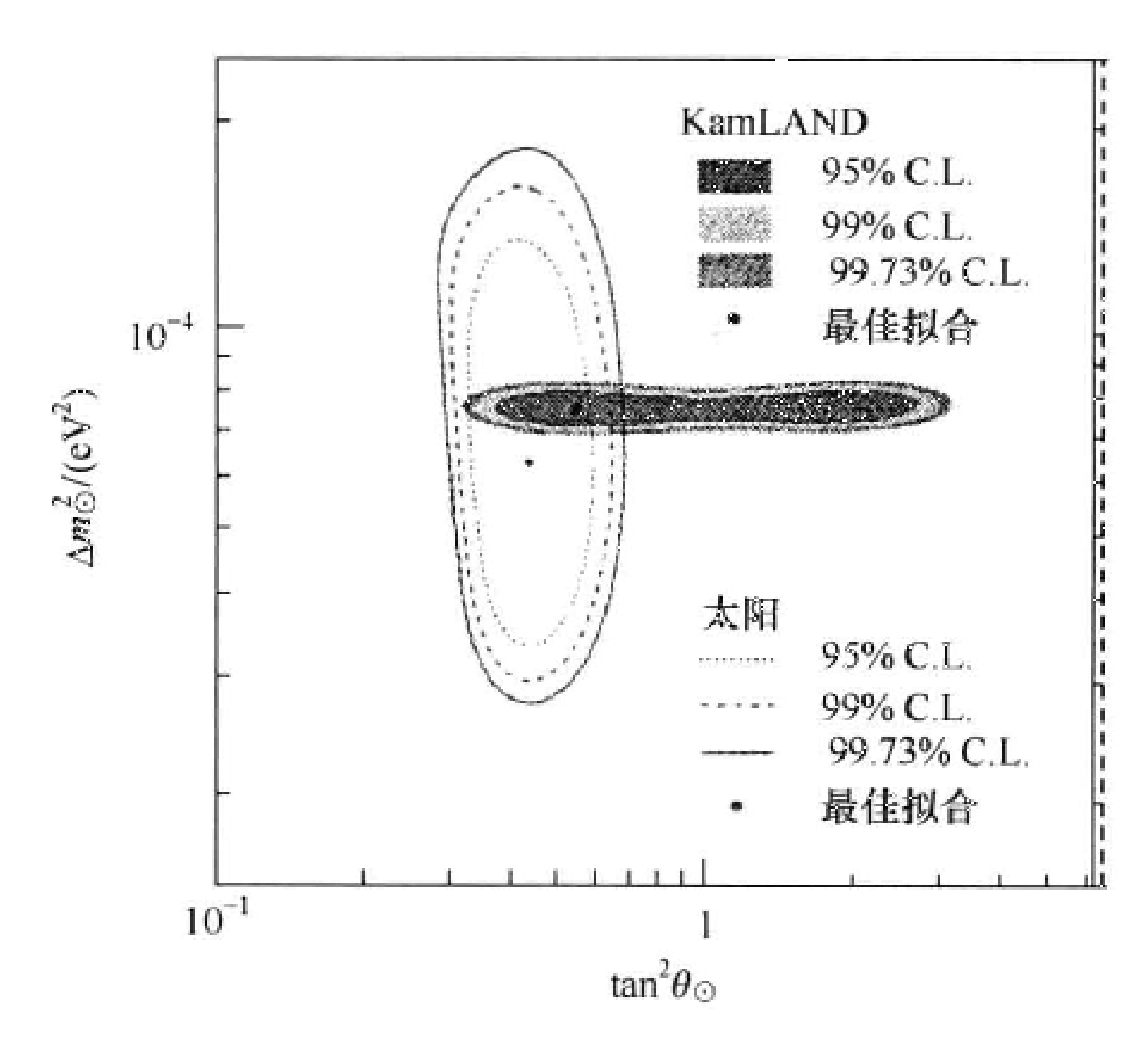


图 8.5　KamLAND 和太阳中微子数据允许的中微子振荡参数 $\Delta m_{\odot}^2$ 和 $\tan^2\theta_{\odot}$
最佳拟合点对应的是大混合角(LMA)解

§8.2　中微子振荡的理论描述

上一节我们已经知道中微子有振荡,因而必然有质量,并且三种中微子 ν_e,ν_μ,ν_τ 质量都不相同,且至少有两种味的中微子质量不为零.我们现在讨论理论上如何描述中微子振荡.

8.2.1　真空中的中微子振荡

中微子态随时间的变化应当从质量本征态 $|\nu_i\rangle$ 出发,由薛定谔方程描写,即

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\nu_i(t)\rangle = H|\nu_i(t)\rangle. \tag{8.18}$$

令 $|\nu_i(t=0)\rangle \equiv |\nu_i\rangle$,则

$$|\nu_i(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_i t}|\nu_i\rangle. \tag{8.19}$$

由于真空中中微子沿直线传播,所以用一维空间就够了.假定 $t=0$ 时在 $x=0$ 处有 $|\nu_i\rangle$ 态,ν_i 飞行距离 L 后所用时间

$$t = L/v_i. \tag{8.20}$$

其中速度 $v_i = p_i/E_i \approx 1$,这因中微子质量非常小.所以

$$t \sim L. \tag{8.21}$$

在 $x=L, t=L$ 时中微子态为

$$e^{-iE_i t}|\nu_i\rangle \approx e^{-iE_i L}|\nu_i\rangle, \tag{8.22}$$

其中

$$E_i=\sqrt{p_i^2+m_i^2}\approx p_i\left(1+\frac{m_i^2}{2p_i^2}\right)\approx p_i+\frac{m_i^2}{2p_i}\approx E+\frac{m_i^2}{2E}. \tag{8.23}$$

(8.23)式中的 E 可理解为产生的中微子的平均能量,也可理解为 $m_i=0$ 时的中微子能量.实际上,实验测出的不同中微子的质量都小于 1 eV,因而(8.23)式是很好的近似.例如,对静止的 π^+ 介子衰变为 $\mu^+\nu_\mu$ 过程,当 $m_\nu=0$ 时,

$$E_\nu=E=\frac{m_\pi}{2}\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)\approx 30\text{MeV}. \tag{8.24}$$

$m_\nu\neq 0$ 时,对 $\pi^+\to\mu^+\nu_i$,则由(8.23)式知

$$\begin{aligned}E_i&=E+\frac{m_i^2}{2m_\pi}\approx E(1+1.2\times 10^{-16}),\\ p_i&=|\boldsymbol{p}_i|\approx E(1-4.4\times 10^{-16}).\end{aligned} \tag{8.25}$$

(8.25)式中的 E 即(8.24)式中 $m_\nu=0$ 时的 E.显然,这是一个很好的近似.

利用(8.23)式将(8.22)式改写为

$$|\nu_i(t)\rangle_{t=L}=e^{-i\left(E+\frac{m_i^2}{2E}\right)L}|\nu_i\rangle. \tag{8.26}$$

当 $x=0, t=0$ 时,由(8.5)式知

$$|\nu_\alpha\rangle=\sum_i U_{\alpha i}^*\,|\nu_i\rangle. \tag{8.27}$$

到 $x=L, t=L$ 时,(8.27)式的 $|\nu_\alpha\rangle$ 变为

$$|\nu_\alpha\rangle'=\sum_i U_{\alpha i}^*\,e^{-i\left(E+\frac{m_i^2}{2E}\right)L}\,|\nu_i\rangle, \tag{8.28}$$

所以在 $t=L, x=L$ 时,$|\nu_\alpha\rangle'$ 中含有 $|\nu_\beta\rangle$ 的几率振幅

$$\langle\nu_\beta|\nu_\alpha\rangle'=e^{-iEL}\sum_i U_{\alpha i}^*U_{\beta i}\,e^{-i\frac{m_i^2}{2E}L}.$$

由于因子 e^{-iEL} 与中微子种类无关,对几率无影响,故可去掉,几率振幅可写成

$$A(\nu_\alpha\to\nu_\beta)=\sum_i U_{\alpha i}^*U_{\beta i}\,e^{-i\frac{m_i^2}{2E}L}. \tag{8.29}$$

因此,ν_α 飞行距离 L 后变为 ν_β 的几率

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = |A(\nu_\alpha \to \nu_\beta)|^2 = \sum_{j,k} U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}L}$$
$$= \sum_{j=1}^{3} |U_{\alpha j} U_{\beta j}^*|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j<k}^{3} U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}L}\right], \tag{8.30}$$

其中

$$\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2. \tag{8.31}$$

(8.30)式还可改写为

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \sum_j |U_{\alpha j} U_{\beta j}^*|^2 + 2\sum_{j<k} \mathrm{Re}(U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^*)\cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}L\right)$$
$$+ 2\sum_{j<k} \mathrm{Im}(U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^*)\sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}L\right)$$
$$= \left|\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^*\right|^2 - 4\sum_{j<k} \mathrm{Re}(U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^*)\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right)$$
$$+ 2\sum_{j<k} \mathrm{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^*)\sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right)$$
$$= \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{j<k} \mathrm{Re}(U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* U_{\beta j}^*)\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right)$$
$$+ 8J\sum_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2}{4E}L\right), \tag{8.32}$$

这里已用了 U 矩阵的幺正性

$$\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta}.$$

(8.32)式最后一步用了 U 矩阵的幺正性条件和 U 矩阵的标准参数化表示式(3.62)，即轻子混合矩阵 U 和夸克混合矩阵 V_{CKM} 有相同的标准参数化形式，只是混合角和复位相的大小不同.(8.32)最后等式中的 J 为 Jarlskog 不变量(3.71)，且用了三角函数的和差化积公式

$$\sin A\sin B\sin C = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\sin C$$
$$= \frac{1}{4}[\sin(C+A-B) + \sin(C-A+B)$$
$$-\sin(C+A+B) - \sin(C-A-B)], \tag{8.33}$$

其中

$$A=\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E},\quad B=\frac{\Delta m_{31}^2}{4E}L,\quad C=\frac{\Delta m_{32}^2}{4E}L. \tag{8.34}$$

注意 $\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta$ 的几率可通过 $U \to U^*$，由(8.32)式得到，即[注意 $U \to U^*$ 时 $J \to -J$，这在(3.71)式中易看出]

$$P(\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{j<k}\mathrm{Re}(U_{\alpha j}U_{\beta k}U_{\alpha k}^*U_{\beta j}^*)\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right)$$
$$- 8J\sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2}{4E}L\right). \tag{8.35}$$

(8.35)式也可在 CPT 不变性假设下得到. 实际上 $\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta$ 是 $\nu_\beta \to \nu_\alpha$ 的 CPT 镜像过程，所以

$$P(\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta) = P(\nu_\beta \to \nu_\alpha). \tag{8.36}$$

而从(8.32)式可看出，

$$P(\nu_\beta \to \nu_\alpha; U) = P(\nu_\alpha \to \nu_\beta; U^*), \tag{8.37}$$

右方正是在(8.32)式将 $U \to U^*$ 所得到的，即(8.35)式.

如果只有两种味道的中微子，如 ν_α，ν_β，质量本征态只有 ν_1，ν_2，则只有一个 $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$，和 2×2 U 矩阵

$$U=\begin{pmatrix} U_{\alpha1} & U_{\alpha2} \\ U_{\beta1} & U_{\beta2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \tag{8.38}$$

由(8.32)式易见($\alpha \neq \beta$)

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}L\right)$$
$$= \sin^2 2\theta \sin^2\left[1.27\,\frac{\Delta m^2(\mathrm{eV}^2)}{E(\mathrm{GeV})}L(\mathrm{km})\right]. \tag{8.39}$$

这正是在 8.1.1 节中用的公式(8.8).

8.2.2　物质中的中微子振荡

为了讨论物质中的中微子振荡，我们先给出用哈密顿量描写的真空中振荡的标准形式，然后再推广至有物质的情况. 现考虑存在两种味道的中微子情形.

由(8.5)式，在真空中哈密顿量 H_{vac} 的矩阵元可写成

$$\langle \nu_\alpha | H_{\mathrm{vac}} | \nu_\beta \rangle = \sum_{ij} U_{\alpha i}U_{\beta j}^* \langle \nu_i | H_{\mathrm{vac}} | \nu_j \rangle$$
$$= \sum_j U_{\alpha j}U_{\beta j}^* \sqrt{p^2 + m_j^2}. \tag{8.40}$$

这里用了$\langle\nu_i|\nu_j\rangle=\delta_{ij}$，且用了 $H_{\text{vac}}|\nu_j\rangle=E_j|\nu_j\rangle\approx\sqrt{p^2+m_j^2}$，即用了近似 $p_j\approx p$，这是(8.23)式中已用过的近似.由(8.28)，(8.29)，(8.30)式已经知道，讨论中微子味道改变时，只有相对的位相是重要的，因而只有相对能量才有关，而对不同味道都一样的公共能量因子可以去掉.因此，H_{vac}(2×2 矩阵)中任何 $E_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$的因子都可去掉.因中微子质量很小，有

$$\sqrt{p^2+m_j^2}\approx p+\frac{m_j^2}{2p},$$

代人(8.40)式，可得

$$\langle\nu_\alpha\mid H_{\text{vac}}\mid\nu_\beta\rangle=p\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2p}\sum_j U_{\alpha j}U_{\beta j}^*m_j^2. \tag{8.41}$$

(8.41)式中第一项对中微子味改变(振荡)无影响，可去掉，因而有

$$\langle\nu_\alpha\mid H_{\text{vac}}\mid\nu_\beta\rangle=\frac{1}{2p}\sum_j U_{\alpha j}U_{\beta j}^*m_j^2\approx\frac{1}{2E}\sum_j U_{\alpha j}U_{\beta j}^*m_j^2.$$

由(8.38)式，得

$$H_{\text{vac}}=\frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix}-\cos2\theta+\dfrac{m_1^2+m_2^2}{\Delta m^2} & \sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta+\dfrac{m_1^2+m_2^2}{\Delta m^2}\end{pmatrix}$$

去掉常数项，

$$\frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix}\dfrac{m_1^2+m_2^2}{\Delta m^2} & 0\\ 0 & \dfrac{m_1^2+m_2^2}{\Delta m^2}\end{pmatrix}=\frac{m_1^2+m_2^2}{4E}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

这样有

$$H_{\text{vac}}=\frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix}-\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}. \tag{8.42}$$

(8.42)式是在基底$|\nu_\alpha\rangle$，$|\nu_\beta\rangle$上写出的，而不是在 H_{vac}的本征态$|\nu_1\rangle$，$|\nu_2\rangle$上写出，因而不是对角的.假定$|\nu_\alpha\rangle=|\nu_e\rangle$，$|\nu_\beta\rangle=|\nu_\mu\rangle$，则

$$\begin{aligned}|\nu_e\rangle&=|\nu_1\rangle\cos\theta+|\nu_2\rangle\sin\theta,\\ |\nu_\mu\rangle&=-|\nu_1\rangle\sin\theta+|\nu_2\rangle\cos\theta.\end{aligned} \tag{8.43}$$

(8.42)式的本征值解出为

$$\lambda_1 = -\frac{\Delta m^2}{4E}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta m^2}{4E}. \tag{8.44}$$

$|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$的时间发展将由(8.44)式决定，所以

$$|\nu_e(t)\rangle = e^{i\frac{\Delta m^2}{4E}t}|\nu_1\rangle\cos\theta + e^{-i\frac{\Delta m^2}{4E}t}|\nu_2\rangle\sin\theta.$$

ν_e 在 t 时刻变为 ν_μ 的几率(ν_e 飞行距离 L 时 $t=L$)

$$\begin{aligned}P(\nu_e \to \nu_\mu) &= |\langle\nu_\mu|\nu_e(t)\rangle|^2 \\ &= |\sin\theta\cos\theta(-e^{i\frac{\Delta m^2}{4E}t} + e^{-i\frac{\Delta m^2}{4E}t})|^2 \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}t\right) \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}L\right).\end{aligned} \tag{8.45}$$

这即我们前面导出的(8.39)式.

下面我们用与(8.40)～(8.45)式平行的方法讨论 ν_e 穿过物质时的情形，并且限定中微子与物质的相互作用在标准模型框架内，然后讨论 ν_e, ν_μ 在物质中的散射.

ν_e 穿过物质时有交换 W 的带电流相互作用，也有交换 Z 的中性流作用. 交换 Z 粒子的中性流作用对所有中微子(ν_e, ν_μ, ν_τ)都相同，带电流(交换 W)作用 ν_e-e，$\bar{\nu}_e$-e 符号相反. 对 ν_e 与电子作用有效哈密顿量，交换 W 的带电流作用

$$V_W = \sqrt{2}G_F N_e, \tag{8.46}$$

其中 N_e 为物质中单位体积内的电子密度. 对 $\bar{\nu}_e$，(8.46)式变号. 对电中性物质，ν_e 与 e 和 p 的中性流作用相消，故

$$V_Z = -\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n, \tag{8.47}$$

其中 N_n 为物质中的中子密度. 此式对 ν_μ 也成立. (8.46)，(8.47)式的理论推导可参阅邢志忠和周顺合写的书[15]. 该书对有关中微子的许多问题都有详尽的讨论. 注意到 ν_μ 与电子之间只有交换 Z 的中性流作用，所以对 ν_e, ν_μ 两味道的情形，物质中的哈密顿量为

$$H_M = H_{vac} + V_W\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + V_Z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8.48}$$

由于 V_Z 对不同味道的中微子是相同的，按前面的讨论，V_Z 不影响振荡，因而可去掉. 这样，物质中的哈密顿量可写为

$$H_M=H_{vac}+V_W\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=H_{vac}+\frac{V_W}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\frac{V_W}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \tag{8.49}$$

(8.49)式第三项又可以去掉,因此可记

$$H_M=H_{vac}+\frac{V_W}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix}-(\cos2\theta-x)&\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta-x\end{pmatrix}, \tag{8.50}$$

其中

$$x=\frac{V_W/2}{\Delta m^2/4E}=\frac{2\sqrt{2}G_F N_e E}{\Delta m^2}. \tag{8.51}$$

定义

$$\begin{aligned}&\Delta m_M^2=\Delta m^2\sqrt{\sin^2 2\theta+(\cos2\theta-x)^2},\\&\sin^2 2\theta_M=\frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta+(\cos2\theta-x)^2},\end{aligned} \tag{8.52}$$

则 H_M 可改写为

$$H_M=\frac{\Delta m_M^2}{4E}\begin{bmatrix}-\cos2\theta_M&\sin2\theta_M\\\sin2\theta_M&\cos2\theta_M\end{bmatrix}. \tag{8.53}$$

显然,(8.42)式若将 $\theta\to\theta_M$,$\Delta m^2\to\Delta m_M^2$ 就是(8.53)式.

当然,在物质中的质量本征态 $|\nu_1\rangle_M$,$|\nu_2\rangle_M$ 与真空中的 $|\nu_1\rangle$,$|\nu_2\rangle$ 不同,混合角也不同($\theta\to\theta_M$).对照(8.43)~(8.45)式,则有物质中 $\nu_e\to\nu_\mu$ 的几率

$$P_M(\nu_e\to\nu_\mu)=\sin^2 2\theta_M\sin^2\left(\frac{\Delta m_M^2}{4E}L\right). \tag{8.54}$$

从(8.52)式看出,若 $\sin2\theta\ll1$,而 $x\sim\cos2\theta$,则 $\sin^2 2\theta_M$ 可能很大(例如趋近 1),这即所谓共振.

最早讨论物质效应的是 Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein[16],所以该效应又称 MSW 效应.

实际上中微子有三种味道,$P(\nu_\alpha\to\nu_\beta)$ 由(8.32)式表示,因而 Δm_{kj}^2 有 3 个独立的量,Δm_{21}^2,Δm_{31}^2,Δm_{32}^2.大气中微子振荡给出的 $\Delta m^2\approx2.43\times10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$,而太阳中微子给出 $\Delta m_\odot^2\approx7.59\times10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$.在长基线中微子实验中,为获取大的振荡效应,要使 $\sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}L\right)\approx1$,即

$$\frac{\Delta m^2}{4E}L\approx\frac{\pi}{2}$$

或

$$L \approx \frac{\pi}{2}\frac{4E}{\Delta m^2}.$$

Δm^2 越大，须用的距离 L 越短，所以一般选大气实验给出的 $\Delta m^2 \approx 2.43\times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$ 来设计实验.

以上我们用比较简单的方法讨论了物质效应，这种方法取自文献[17]，更全面的讨论仍须参阅文献[15].

应该指出，(8.51)和(8.52)式中的 x 对 ν_e 和 $\bar{\nu}_e$ 反号，这将带来 ν_e 和 $\bar{\nu}_e$ 各自的振荡过程由 x 变号引起的不对称性. 这种不对称性并不是因 CP 破坏引起的. 如振荡几率，真空中 $P(\nu_e\to\nu_\mu;t)\neq P(\bar{\nu}_e\to\bar{\nu}_\mu;t)$ 意味着 CP 破坏了，但在物质中由于 x 变号也会引起 $P(\nu_e\to\nu_\mu;t)\neq P(\bar{\nu}_e\to\bar{\nu}_\mu;t)$. 这部分与 CP 破坏无关的不对称性在分析物质中的 CP 破坏时要扣除掉.

§8.3 中微子的狄拉克质量和马约拉纳质量

8.3.1 狄拉克中微子

标准模型中中微子只有左手分量 ν_L，所以构不成狄拉克质量项，中微子质量严格为零. 如果把标准模型做一最简单的扩充，则可只引入 $\mathrm{SU(2)_L}$ 单态的中微子右手分量 $\mathrm{N_R}$，并引入相应的类似于(3.12)式的 Yukawa 耦合

$$\begin{aligned} -\mathscr{L}_{\mathrm{Dirac}} &= \bar{l}_L Y_\nu \widetilde{H} N_R + h.c. \\ &= \bar{l}_{\alpha L} Y_\nu^{\alpha j} \widetilde{H} N_{jR} + h.c.\,, \end{aligned} \tag{8.55}$$

其中

$$\alpha = \mathrm{e},\mu,\tau,\quad j=1,2,3,$$

$$l_{eL}=\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L,\quad l_{\mu L}=\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L,\quad l_{\tau L}=\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L,$$

$Y_\nu^{\alpha j}$ 为 Yukawa 耦合常数，

$$\widetilde{H} = \mathrm{i}\sigma_2 H^*,\quad H=\begin{pmatrix}H^+\\ H^0\end{pmatrix}. \tag{8.56}$$

$\mathrm{SU(2)_L\times U(1)_Y}$ 自发破缺到 $\mathrm{U(1)_Q}$ 时，$\langle\widetilde{H}\rangle=\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix}$，(8.55)式破缺到

$$-\mathscr{L}'_{\mathrm{Dirac}} = \bar{\nu}_L M_D N_R + h.c.\,, \tag{8.57}$$

其中

$$\nu_L=\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ \nu_{\mu L}\\ \nu_{\tau L}\end{pmatrix},\quad N_R=\begin{pmatrix}N_{1R}\\ N_{2R}\\ N_{3R}\end{pmatrix}, \tag{8.58}$$

而

$$M_D=vY_\nu=v\begin{pmatrix}Y_\nu^{e1} & Y_\nu^{e2} & Y_\nu^{e3}\\ Y_\nu^{\mu1} & Y_\nu^{\mu2} & Y_\nu^{\mu3}\\ Y_\nu^{\tau1} & Y_\nu^{\tau2} & Y_\nu^{\tau3}\end{pmatrix} \tag{8.59}$$

为中微子质量矩阵.

M_D 可用两个幺正矩阵 V,U 对角化为

$$U^\dagger M_D V=M_\nu=\mathrm{diag}\{m_1,m_2,m_3\}, \tag{8.60}$$

其中 $m_i(i=1,2,3)$ 为 3 个中微子质量本征态 ν_1,ν_2,ν_3 的质量.

(8.57)式在 M_D 对角化后可改写为

$$-\mathscr{L}'_{\mathrm{Dirac}}=\bar{\nu}'_L M_\nu N'_R+h.c., \tag{8.61}$$

$$\nu'_L=U^\dagger\nu_L,\quad N'_R=V^\dagger N_R, \tag{8.62}$$

$$\nu'=\nu'_L+N'_R=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix}, \tag{8.63}$$

显然,

$$-\mathscr{L}'_{\mathrm{Dirac}}=\bar{\nu}'M_\nu\nu'=\sum_{i=1}^{3}m_i\bar{\nu}_i\nu_i. \tag{8.64}$$

轻子带电流相互作用拉氏量(8.3)式可写为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{CC}}=\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}\bar{\mu}\bar{\tau})_L\gamma^\mu U\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix}_L W_\mu^-+h.c.. \tag{8.65}$$

由于引入的中微子右手分量是 SU(2)单态,总轻子数仍然守恒.

8.3.2 马约拉纳中微子

马约拉纳(Majorana)中微子是由质量本征态定义的. 令 $\nu_i(i=1,2,3)$为中微子质量本征态,则马约拉纳中微子满足下面的条件[18]:

$$\nu_i^c=\mathscr{C}\bar{\nu}_i^{\mathrm{T}}=\nu_i. \tag{8.66}$$

(8.66)式的定义表明,马约拉纳中微子粒子和其反粒子是相同的.

由(8.58)式的 ν_L 出发,马约拉纳中微子的质量项可写为

$$-\mathscr{L}'_{\mathrm{Majorana}}=\frac{1}{2}\bar{\nu}_L M(\nu_L)^C+h.c.. \tag{8.67}$$

(8.66)式中电荷共轭矩阵 $\mathscr{C}=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0$,

$$\mathscr{C}^{-1}=\mathscr{C}^{\dagger}=\mathscr{C}^{\mathrm{T}}=-\mathscr{C},\quad \mathscr{C}\gamma_{\mu}^{\mathrm{T}}\mathscr{C}^{-1}=-\gamma_{\mu},$$

$$\nu_{\mathrm{L}}=P_{\mathrm{L}}\nu=\frac{1-\gamma_5}{2}\nu,\quad \nu_{\mathrm{R}}=P_{\mathrm{R}}\nu=\frac{1+\gamma_5}{2}\nu, \tag{8.68}$$

$$(\nu_{\mathrm{L}})^C=(\nu^C)_{\mathrm{R}},\quad (\nu_{\mathrm{R}})^C=(\nu^C)_{\mathrm{L}}.$$

因(8.67)式为洛伦兹标量，所以

$$[\bar{\nu}_{\mathrm{L}}M(\nu_{\mathrm{L}})^C]=[\bar{\nu}_{\mathrm{L}}M(\nu_{\mathrm{L}})^C]^{\mathrm{T}}=-\bar{\nu}_{\mathrm{L}}\mathscr{C}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\bar{\nu}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}=\bar{\nu}_{\mathrm{L}}M^{\mathrm{T}}(\nu_{\mathrm{L}})^C. \tag{8.69}$$

上式负号源于两费米场交换，且用了 $\mathscr{C}^{\mathrm{T}}=-\mathscr{C}$. 由此可导出

$$M^{\mathrm{T}}=M,$$

即 M 为对称矩阵. 因此，它可以由幺正矩阵 U 对角化，

$$U^{\dagger}MU^{*}=M_{\nu}=\mathrm{diag}\{m_1,m_2,m_3\}.$$

由此，(8.67)式可改变为

$$-\mathscr{L}'_{\mathrm{Majorana}}=\frac{1}{2}\bar{\nu}'_{\mathrm{L}}M_{\nu}(\nu'_{\mathrm{L}})^C+h.c., \tag{8.70}$$

其中，$\nu'_{\mathrm{L}}=U^{\dagger}\nu_{\mathrm{L}}$，$(\nu'_{\mathrm{L}})^C=\mathscr{C}\bar{\nu}'^{\mathrm{T}}_{\mathrm{L}}$，且

$$\nu'=\nu'_{\mathrm{L}}+(\nu'_{\mathrm{L}})^C=\nu'_{\mathrm{L}}+(\nu'^C)_{\mathrm{R}}=\nu'_{\mathrm{L}}+\nu'_{\mathrm{R}}=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix}, \tag{8.71}$$

最后一步用了 $\nu'^C=\nu'$，即 $\nu_i^C=\nu_i$.

(8.70)可进一步改写成

$$-\mathscr{L}'_{\mathrm{Majorana}}=\frac{1}{2}\bar{\nu}'M_{\nu}\nu'=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}m_i\bar{\nu}_i\nu_i. \tag{8.72}$$

应当指出，马约拉纳质量项(8.67)式破坏具有 $\mathrm{SU(2)_L}$ Higgs 二重态的标准模型的 $\mathrm{SU(2)_L\times U(1)_Y}$ 的规范不变性. 但如果引入 $\mathrm{SU(2)_L}$ Higgs 三重态到标准模型中，则可容纳马约拉纳质量项.

马约拉纳中微子的带电流拉氏量与(8.65)式相同. 容易证明，马约拉纳质量项破坏轻子数守恒.

由于弱电相互作用保持手征性不变，要区分狄拉克中微子和马约拉纳中微子是很困难的.

目前知道的能区分两种中微子的实验是 $0\nu2\beta$ 衰变$(A,Z)\to(A,Z+2)+2e^-$过程. 这种原子核的衰变轻子数改变为 2，只有马约拉纳质量项才能提供轻子数改变为 2 的过程.（见图 8.6）

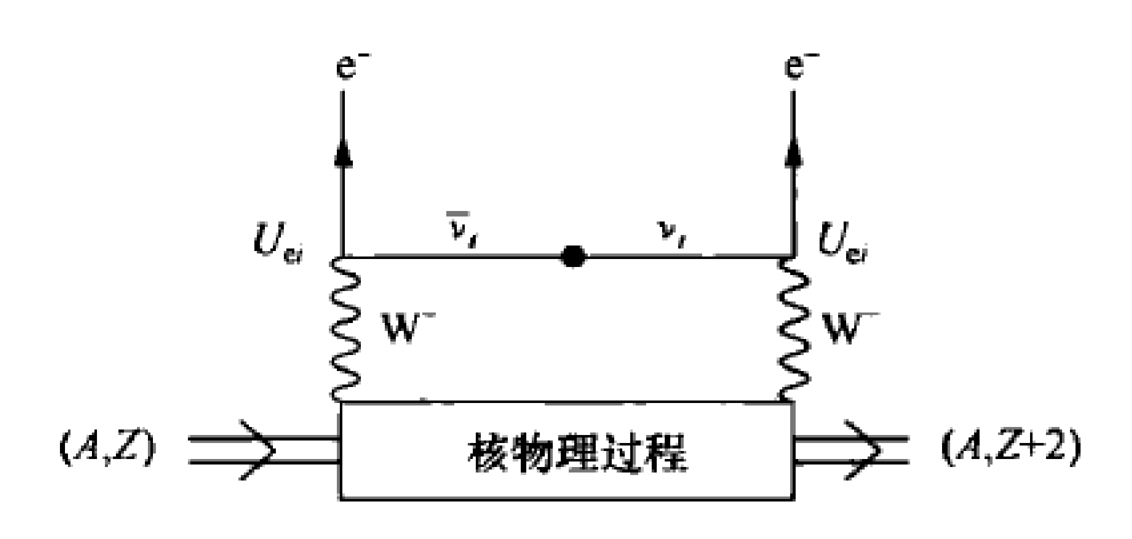


图 8.6　偶-偶核通过交换虚的马约拉纳中微子产生 0ν2β 衰变

三种中微子的质量 m_{ν_e}，m_{ν_μ}，m_{ν_τ} 的大小至今没有准确的实验数据，只有质量上限. 2010 年 PDG 给出的结果为[19]

$$m_{\nu_e} < 2\text{eV},$$
$$m_{\nu_\mu} < 0.19\text{MeV},$$
$$m_{\nu_\tau} < 18.2\text{MeV}.$$

宇宙学观测实验对中微子质量总和的限制为[20]

$$\sum_i m_i < 0.28\text{eV},$$

可见更为严格.

关于理论上如何获得中微子小质量的机制——跷跷板机制(seesaw mechanism)，可参阅书[15]中的第四章.

§8.4　中微子混合矩阵的参数化形式

对于夸克的 V_{CKM}，我们已在第三章给出了两种参数化方式，即(3.62)和(3.63)式.

对于中微子混合矩阵 U_{MNS}，可完全参照夸克情况参数化. 一般情况下 U 可以参数化为

$$U_{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}\text{e}^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}\text{e}^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}\text{e}^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}\text{e}^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} P', \quad (8.73)$$

其中

$$P' = \text{diag}(\text{e}^{i\rho}, \text{e}^{i\sigma}, 1) \quad (8.74)$$

为马约拉纳相位矩阵. 这个矩阵不可能用马约拉纳中微子(ν_1，ν_2，ν_3)的位相改变来消除. 实际上，由于 $\nu_i^C = \nu_i$ 的限制，$\nu_i \to \text{e}^{i\varphi_i}\nu_i$ 变换是不允许的，只有 $\varphi_i = 0$ 才能满足

马约拉纳条件 $\nu_i^C=\nu_i$. 但对夸克(d,s,b)，则可由 $d\to e^{i\varphi_d}d$，$s\to e^{i\varphi_s}s$，$b\to e^{i\varphi_b}b$ 来消除 P' 中的相位，使 $P'=\mathrm{diag}(1,1,1)$. 所以对狄拉克中微子，混合矩阵与夸克一样，即(3.62)式.[此时 $P'=\mathrm{diag}(1,1,1)$，即单位矩阵，可去掉]对马约拉纳中微子，P' 不能去掉，混合矩阵即(8.73)，(8.74)式.

混合矩阵还有其他不同的参数化形式，各有优缺点. 详细讨论可参阅书[15]中的§3.5.

§8.5　中微子振荡和 CP 破坏

利用中微子振荡实验可以研究 CP，T，CPT 破坏问题.

$$
\begin{aligned}
CP\ \text{破坏} &\Rightarrow P(\nu_\alpha\to\nu_\beta;t)\neq P(\bar{\nu}_\alpha\to\bar{\nu}_\beta;t),\\
T\ \text{破坏} &\Rightarrow P(\nu_\alpha\to\nu_\beta;t)\neq P(\nu_\beta\to\nu_\alpha;t),\\
CPT\ \text{破坏} &\Rightarrow P(\nu_\alpha\to\nu_\beta;t)\neq P(\bar{\nu}_\beta\to\bar{\nu}_\alpha;t).
\end{aligned}
$$

下面只讨论真空中的情形. 必须指出，我们的计算从一开始就假定 CPT 不变，这点可从(8.35)中 α,β 互换看出.

$$
\begin{aligned}
P(\bar{\nu}_\beta\to\bar{\nu}_\alpha;t) &= \delta_{\alpha\beta}-4\sum_{j<k}\mathrm{Re}(U_{\alpha j}U_{\beta k}U^*_{\alpha k}U^*_{\beta j})\sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{4E}L\right)\\
&\quad +8J\sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{21}}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m^2_{31}}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m^2_{32}}{4E}L\right). \qquad (8.75)
\end{aligned}
$$

比较(8.32)式，可见

$$
P(\nu_\alpha\to\nu_\beta;t)=P(\bar{\nu}_\beta\to\bar{\nu}_\alpha;t),
$$

正好满足 CPT 不变性.

CP 破坏可由(8.32)与(8.35)式之差来表示，即

$$
\begin{aligned}
\Delta P_{CP} &= P(\nu_\alpha\to\nu_\beta)-P(\bar{\nu}_\alpha\to\bar{\nu}_\beta)\\
&= 16J\sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{21}}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m^2_{31}}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m^2_{32}}{4E}L\right).
\end{aligned}
\qquad (8.76)
$$

由(8.73)，(8.32)，(8.35)表达式看，马约拉纳相位 ρ,σ 不进入振荡几率的表达式，ΔP_{CP} 表式也与 ρ,σ 无关. 因

$$
J=\cos\theta_{12}\cos^2\theta_{13}\cos\theta_{23}\sin\theta_{12}\sin\theta_{13}\sin\theta_{23}\sin\delta_{13},
$$

它与三个混合角 θ_{12}，θ_{13}，θ_{23} 都有关系.

目前，3 σ 的实验拟合值为[21]

$$
\sin^2\theta_{12}\approx 0.263\sim 0.375,\ \sin^2\theta_{23}\approx 0.331\sim 0.644,\ \sin^2\theta_{13}<0.046. \qquad (8.77)
$$

如果 $\theta_{13}=0$，则 $\Delta P_{CP}=0$，所以 θ_{13} 到底有多大是关键.

在给出 θ_{13} 最新实验结果之前，我们先来讨论中微子质量的等级问题. 一般分两类：正常的(normal)和逆反的(inverted). 正常和逆反两种质量等级如图 8.7 所示. 在正常等级时，

$$\Delta m_{32}^2 \approx \Delta m_{31}^2 \gg \Delta m_{21}^2 > 0;$$

在逆反等级下，

$$\Delta m_{32}^2 \approx \Delta M_{31}^2 < 0.$$

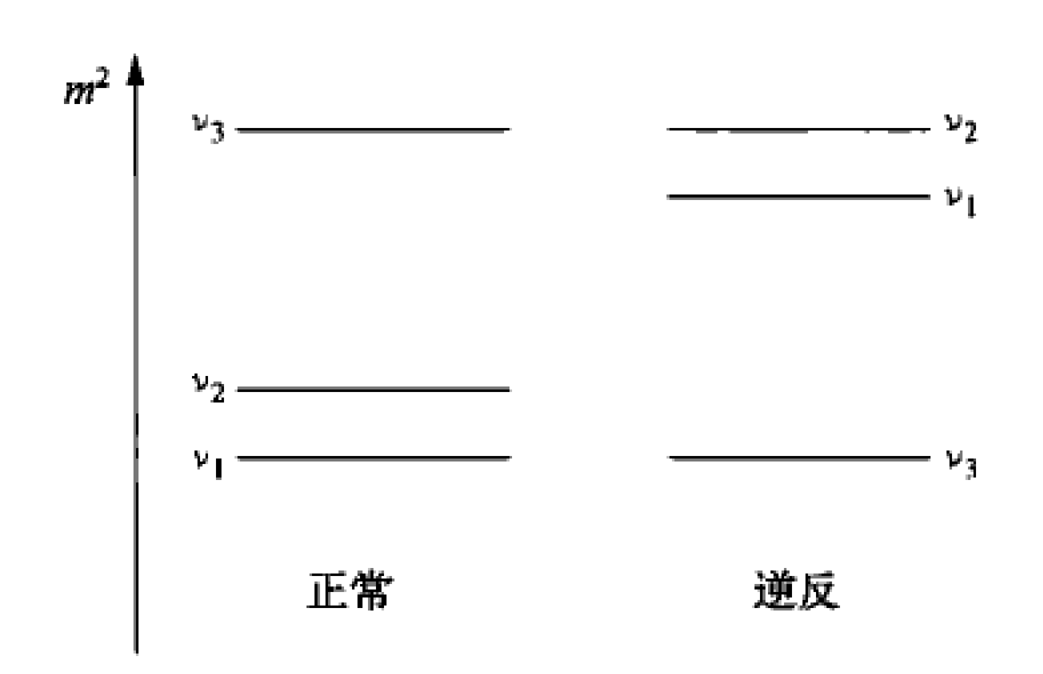


图 8.7 中微子质量等级

由于地球的物质密度不大，在大气中微子(ν_μ)振荡实验和加速器 ν_μ 失踪实验(MINOS)中都可忽略物质效应而用两种味道中微子振荡公式(8.8)或(8.39)式. 显然从这些公式可看出无法确定 Δm^2 的符号，即只能给出绝对值

$$|\Delta m_{31}^2| \approx |\Delta m_{32}^2| \approx 2.4\times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2.$$

但太阳中微子实验则不同. 太阳物质密度大，物质效应不能忽略. 太阳中微子穿过太阳至地球发生共振时，由(8.52)式和(8.51)式，

$$x=\frac{2\sqrt{2}G_F N_e E}{\Delta m^2} \approx \cos 2\theta.$$

由(8.17)式中 $\tan\theta \approx 0.47$ 看出，$\cos 2\theta > 0$，因而可定出 $x>0$，从而定出的 $\Delta m^2 = \Delta m_{21}^2 > 0$. 不管是正常或逆反质量等级都有[见(8.17)式]

$$\Delta m_{21}^2 \approx 7.59\times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2 > 0.$$

但对 Δm_{32}^2，Δm_{31}^2，正常和逆反质量等级符号相反，这会影响到与 Δm_{32}^2，Δm_{31}^2 有关的实验结果. 例如 T2K[22] 利用加速器产生的 ν_μ 束流来测量 $\nu_\mu \to \nu_e$ 的振荡几率，得到[23]

$$P_{\mu e}=P(\nu_\mu\to\nu_e)\approx\sin^2 2\theta_{13}\sin^2\theta_{23}\frac{\sin^2(A-1)\Delta}{(A-1)^2}$$
$$+\alpha\sin2\theta_{13}\sin2\theta_{12}\sin2\theta_{23}\cos(\Delta+\delta)\frac{\sin A\Delta}{A}\frac{\sin(A-1)\Delta}{A-1}$$
$$+\alpha^2\sin^2 2\theta_{12}\cos^2\theta_{23}\frac{\sin^2 A\Delta}{A^2}, \tag{8.78}$$

其中

$$\Delta\equiv\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E},\quad A\equiv\frac{2EV}{\Delta m_{31}^2},\quad \alpha\equiv\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2},\quad V=\sqrt{2}G_F N_e. \tag{8.79}$$

由(8.78),(8.79)式看出,Δm_{31}^2,Δm_{32}^2因对正常和逆反质量等级的不同而影响 Δ,A,α 的值,从而影响 $P_{\mu e}$. T2K 测量了 $P_{\mu e}$ 并给出了 $\sin^2 2\theta_{13}$ 的值. 对 CP 位相 $\delta=0$ 和正常(逆反)质量等级的结果为

$$0.03(0.04)<\sin^2 2\theta_{13}<0.28(0.34), \tag{8.80}$$

其显示度为 2.5 σ.

中国大亚湾核反应堆 $\bar\nu_e\to\bar\nu_e$ 的存活几率实验[24]对 $\sin^2 2\theta_{13}$ 做了决定性的测量,他们给出在 5.2 σ 显示度下的结果为

$$\sin^2 2\theta_{13}=0.092\pm0.016(\text{stat.})\pm0.005(\text{syst.}). \tag{8.81}$$

由于大亚湾的实验中其中微子探测器距 $\bar\nu_e$ 源头(反应堆)都小于 2 km,$\bar\nu_e$ 能量也较低,在几个 MeV 量级,所以 $\bar\nu_e$ 穿过山体的物质效应可以忽略. 这样,可以应用真空中的公式(8.75),即

$$P(\bar\nu_e\to\bar\nu_e)=1-4\sum_{i<j}|V_{ei}|^2|V_{ej}|^2\sin^2\left(1.27\frac{\Delta m_{ji}^2}{E}L\right)$$
$$\approx1-4|V_{e3}|^2(1-|V_{e3}|^2)\sin^2\left(1.27\frac{\Delta m_{31}^2}{E}L\right)$$
$$=1-\sin^2 2\theta_{13}\sin^2\left(1.27\frac{\Delta m_{31}^2}{E}L\right), \tag{8.82}$$

其中我们用了近似

$$|\Delta m_{32}^2|\approx|\Delta m_{31}^2|\gg\Delta m_{21}^2$$

和

$$|V_{e3}|^2=\sin^2\theta_{13}\ll1.$$

MINOS[7]给出的 $\Delta m_{32}^2\approx2.4\times10^{-3}\,\text{eV}^2$. 大亚湾实验中 $L\approx1\sim2\text{km}$,$E\approx4\text{MeV}=4\times10^{-3}\text{GeV}$. 因(8.82)式中 Δm_{31}^2 以eV^2 为单位,L 以 km 为单位,E 以

GeV 为单位，可以通过调整 L/E 使 $\left(1.27\,\frac{\Delta m_{31}^2}{E}L\right)$ 在 $\pi/2$ 附近以提高 $\sin^2 2\theta_{13}$ 的测量精度. 大亚湾的实验正是这样做的. 具体测量时各种图示请参阅文献[24].

在 CPT 不变的条件下，T 破坏可由(8.32)式给出，

$$\begin{aligned}\Delta P_T &= P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) - P(\nu_\beta \to \nu_\alpha) \\ &= 16J\sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2}{E}L\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2}{E}L\right) \\ &= \Delta P_{CP}, \end{aligned} \tag{8.83}$$

即 T 破坏大小与 CP 破坏大小相等.

迄今为止实验上还没有观测到中微子振荡中的 CP 破坏.

参考文献

[1] Maki Z, Nakagawa M, Sakata S. Prog. Theor. Phys., 1962, 28: 870.
[2] Fukuda Y, et al. (Super-Kamio-Kande Collaboration). Phys. Rev. Lett., 1998, 81: 1562.
[3] Ashine Y, et al. (Super-Kamio-Kande Collaboration). Phys. Rev. D, 2005, 71: 112005.
[4] Ashine Y, et al. (Super-Kamio-Kande Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2004, 93: 101801.
[5] Ahn M H, et al. (K2K Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2003, 90: 041801.
[6] Michael D, et al. (MINOS Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2006, 97: 191801.
[7] Adamson P, et al. (MINOS Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2008, 101: 131802.
[8] Davis Jr, Harmer D S, Hoffman K C. Phys. Rev. Lett., 1968, 20: 1205.
[9] Hampel W, et al. Phys. Lett. B, 1999, 447: 127. Altmann M, et al. Phys. Lett. B, 2005, 616: 174. Abdurashitov J N, et al. Phys. Rev. C, 2009, 80: 015807.
[10] Bahcall J N, Pinsonneault M H, Basu S. Astrophy. J., 2001, 555, 990.
[11] Ahmad Q R, et al. (SNO Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2002, 89: 011301.
[12] Aharmim B, et al. (SNO Collaboration). Phys. Rev. C, 2005, 72: 055502.
[13] Bahcall J N, Serenelli A M, Basu S. Astrophys. J., 2005, 621: L85.
[14] Eguchi K, et al. (KamLAND Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2003, 90: 021802. Abe S, et al. (KamLAND Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2008, 100: 221803.
[15] Xing Z Z, Zhou S. Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology. Springer Press, 2011.
[16] Wolfenstein L. Phys. Rev. D, 1978, 17: 2369. Mikheyev S, Smirnov A. Sov. J. Nucl. Phys., 1986, 42: 913; Sov. Phys. JETP, 1986, 64: 4; Nuovo Cim. 1986, 9C: 17.
[17] Kayser B. arXiv: hep-ph/0506165.
[18] Majorana E. Nuovo Cim., 1937, 14: 171.
[19] Nakamura K, et al. (PDG). J. of Phys. G, 2010, 37: 075021.

[20] Thomas S A, Abdalla F B, Lahav O. Phys. Rev. Lett., 2010, 105: 031301.
[21] Fogli G L, et al. Phys. Rev. D, 2008, 78: 033010.
[22] Abe K, et al. (T2K Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2011, 107: 041801.
[23] Mezzetto M, Schwetz T. J. Phys. G: Part Phys., 2010, 37: 103001.
[24] An F P, et al. (Daya Bay Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2012, 108: 171803.

第九章 非标准模型及新的 CP 破坏机制

本书前八章主要在标准模型框架下讨论 CP 破坏的各种基本问题和最近的实验结果. 最近 LHC 的实验发现了质量在 125 GeV 附近的标量粒子[1]，很大的可能是 Higgs 粒子. 这样一来，标准模型中最后一个也是最重要的一个粒子可能已被发现了. 这就确认了标准模型的正确性. 但是标准模型仍有不足之处. 一是标准模型预言的 CP 破坏的强度不能满足早期宇宙产生重子-反重子不对称的要求，另一方面中微子有质量也不能在标准模型中容纳. 因此，寻找超出标准模型的新的非标准模型及新的 CP 破坏机制是完全必要的. 下面主要介绍目前大家感兴趣的左右对称模型[2]和超对称模型[3]及其相应的新的 CP 破坏机制. 对以上两个非标准模型我们这里不做仔细的介绍，只重点介绍新的 CP 破坏机制. 想真正掌握具体计算方法或打算进入这一领域开展研究，还须仔细阅读有关文献[2]，[3]及相应的原始文献.

§9.1 左右对称模型

左右对称模型的主要优点是 P 破坏和 CP 破坏都可以通过自发破缺来实现. 右手中微子也可以自然地包含在模型中并可获得很大的马约拉纳质量，从而可通过跷跷板(seesaw)机制使左手中微子获得极微小的质量.

最简单的左右对称模型是建立在规范群

$$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\otimes\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}\otimes\mathrm{U}(1) \tag{9.1}$$

上的非阿贝尔规范理论.

在极高的能标 $\mu_{\mathrm{LR}}>1$ TeV 下，左右 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L,R}}$的耦合常数统一为一个，即

$$g_{\mathrm{L}}(\mu_{\mathrm{LR}})=g_{\mathrm{R}}(\mu_{\mathrm{LR}})=g. \tag{9.2}$$

因此，在极高能标下左、右严格对称，宇称 P 是守恒的，即理论保持 P 变换不变性. 在能标 $\mu_{\mathrm{R}}\sim 1\mathrm{TeV}$ 时，$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}$ 对称性自发破缺，矢量介子 W_{R} 获得大质量(TeV 量级). 在更低能标 $\mu_{\mathrm{w}}\sim 100$ GeV 时 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\otimes\mathrm{U}(1)$破缺到 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}}$. 其破缺链可写成

$$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\otimes\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}\otimes\mathrm{U}(1)\xrightarrow{\mu_{\mathrm{R}}}\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\otimes\mathrm{U}(1)\xrightarrow{\mu_{\mathrm{w}}}\mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}}. \tag{9.3}$$

该模型夸克场为

$$Q_L=\begin{pmatrix}U_L\\D_L\end{pmatrix}\ [\mathrm{SU}(2)_L\ \text{二重态},\mathrm{SU}(2)_R\ \text{单态}],$$
$$Q_R=\begin{pmatrix}U_R\\D_R\end{pmatrix}\ [\mathrm{SU}(2)_L\ \text{单态},\mathrm{SU}(2)_R\ \text{二重态}]. \tag{9.4}$$

轻子场为

$$L_L=\begin{pmatrix}N_L\\E_L\end{pmatrix}\ [\mathrm{SU}(2)_L\ \text{二重态},\mathrm{SU}(2)_R\ \text{单态}],$$
$$L_R=\begin{pmatrix}N_R\\E_R\end{pmatrix}\ [\mathrm{SU}(2)_L\ \text{单态},\mathrm{SU}(2)_R\ \text{二重态}]. \tag{9.5}$$

为了破缺 $\mathrm{SU}(2)_R$，必须引入 Higgs 三重态

$$\Delta_R=\begin{pmatrix}\Delta_1^R\\\Delta_2^R\\\Delta_3^R\end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

(9.6)式可以写成无迹的 2×2 矩阵形式

$$\Delta_R=\begin{pmatrix}\dfrac{\Delta_R^+}{\sqrt{2}} & -\Delta_R^{++}\\ \Delta_R^0 & -\dfrac{\Delta_R^+}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

其在 $\mathrm{SU}(2)_R$ 下的变换性质为

$$\Delta_R\to u_R\Delta_R u_R^\dagger, \tag{9.8}$$

其中 u_R 为 $\mathrm{SU}(2)_R$ 的群元素，且为 2×2 矩阵.

给 Δ_R^0 以真空期望值

$$\langle\Delta_R^0\rangle=v_R\sim\mu_R, \tag{9.9}$$

则 $\mathrm{SU}(2)_R$ 将被破缺.

但$\langle\Delta_R^0\rangle$不能使费米子获得质量. 为了使费米子获得质量，还要引入新的 Higgs 多重态 φ，

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1^0 & \varphi_1^+\\ \varphi_2^- & \varphi_2^0\end{pmatrix}. \tag{9.10}$$

φ 为 $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重态，也是 $\mathrm{SU}(2)_R$ 二重态，但其 U(1)超荷必须为零. φ 的变换性质为

$$\varphi\longrightarrow u_L\varphi u_R^\dagger. \tag{9.11}$$

φ 的真空期望值

$$\langle\varphi\rangle=\begin{pmatrix}\kappa_1 & O\\ O & \kappa_2\end{pmatrix}. \tag{9.12}$$

为了保持(9.3)式的破缺链，要求 $\kappa_1,\kappa_2\ll v_R$.

也可引入三重态 Higgs Δ_L，

$$\Delta_L=\begin{pmatrix}\frac{\Delta_L^+}{\sqrt{2}} & -\Delta_L^{++}\\ \Delta_L^0 & \frac{-\Delta_L^+}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \tag{9.13}$$

并且 Δ_L 也可获得真空期望值

$$\langle\Delta_L^0\rangle=v_L. \tag{9.14}$$

(9.3)式的破缺链要求

$$v_L\ll\kappa_1,\quad \kappa_2\ll v_R. \tag{9.15}$$

$SU(2)_L\otimes SU(2)_R\otimes U(1)$ 相应的规范介子 $W_L^{\pm,0}$，$W_R^{\pm,0}$，B 中 $W_L^{\pm,0}$-$W_R^{\pm,0}$ 有混合，W_L^0-W_R^0-B^0 也有混合. W_L-W_R 混合后质量本征态 W_1，W_2 为

$$\begin{aligned}W_1&=W_R\sin\zeta+W_L\cos\zeta,\\ W_2&=W_R\cos\zeta-W_L\sin\zeta,\end{aligned} \tag{9.16}$$

其中

$$\tan\zeta=\frac{\kappa_1\kappa_2}{v_R^2}. \tag{9.17}$$

质量本征值为

$$\begin{aligned}m_{W_1}&\approx g^2\left(|v_L|^2+\frac{|\kappa_1|^2+|\kappa_2|^2}{2}\right),\\ m_{W_2}&\approx g^2\left(|v_R|^2+\frac{|\kappa_1|^2+|\kappa_2|^2}{2}\right).\end{aligned} \tag{9.18}$$

W_L^0-W_R^0-B^0 混合给出质量本征态为零质量的光子 A_γ 和大质量的 Z_1^0，Z_2^0.

现在来看 CP 破坏机制．带电流拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{cc}=\frac{g}{\sqrt{2}}[&(\cos\zeta\,\overline{U}_L^i\gamma_\mu V_L D_L^i+\sin\zeta\,\overline{U}_R^i V_R D_R^i)W_1^\mu\\ &+(-\sin\zeta\,\overline{U}_L^i\gamma_\mu V_L D_L^i+\cos\zeta\,\overline{U}_R^i\gamma_\mu V_R D_R^i)W_2^\mu].\end{aligned} \tag{9.19}$$

CP 破坏机制有三种：

(1) 带电流中的夸克混合矩阵 V_L 在三代夸克情形下会破坏 CP. 这类似于 CKM 矩阵引起的 CP 破坏.

(2) 带电流中的 V_R 也破坏 CP. 这当然是存在右手流时才会发生.

(3) CP 自发破缺. 如果 φ 的真空期望值 κ_1, κ_2 为复数,则会产生破坏 CP 的位相

$$\delta = \arg(\kappa_1 \kappa_2 v_L^* v_R),$$
$$\alpha = \arg(\kappa_1 \kappa_2^*) \tag{9.20}$$

使得 CP 自发破坏.

(1),(2)两种机制当 κ_1, κ_2 均为实数时会导致

$$V_L = V_R = V, \tag{9.21}$$

这便是 V_{CKM}的 CP 破坏机制. 而(3)中的 CP 自发破坏在最简单的左右对称模型中需要参数的精细调整(fine-tuning). 要避免精细调整,则要将最简单的模型加以扩充.

从唯象学的角度看,左右对称模型包含了许多新的须在实验上去寻找的粒子. 由于 W_R 的存在,$\Delta S=2$ 的跃迁有新的贡献. 如 K^0-$\overline{K}^0$ 振荡和 Δm_K 的计算所用的箱图多出了交换 W_R 的部分,如图 9.1 所示.

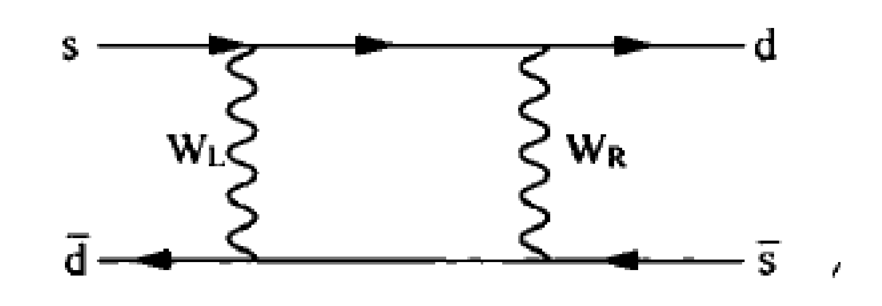


图 9.1　W_R 参与的箱图($\Delta S=2$)

W_R 还导致对中子电偶极矩的新贡献,如图 9.2 所示.

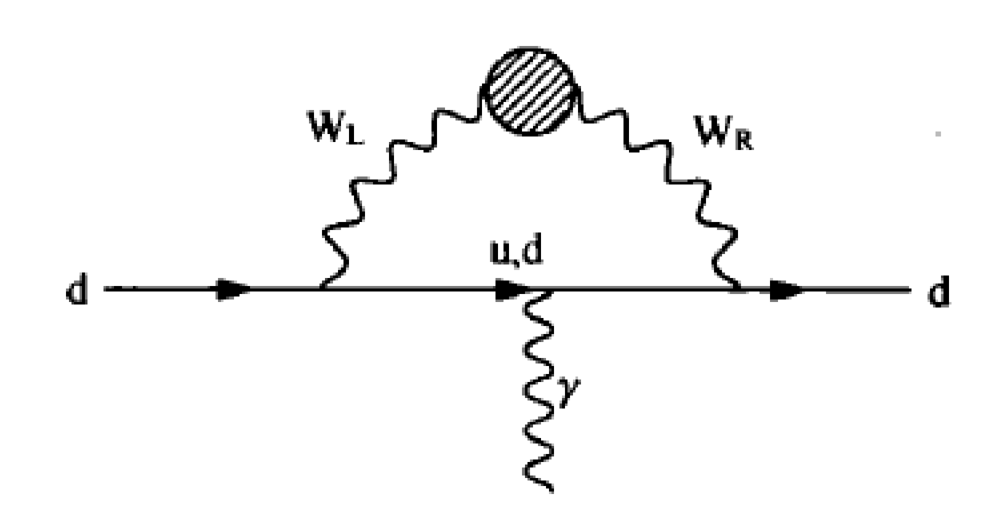


图 9.2　W_R 对 EDM 的新贡献

这些唯象的讨论还有许多. 有兴趣的读者可参阅 Branco 和 Sanda 等人的书[4]及相关文献.

§ 9.2　超对称模型

目前人们对超对称模型有兴趣主要有三大理由:

(1) 可以解决规范等级(gauge hierarchy)问题.

标准模型中 Higgs 粒子的质量在单圈辐射修正下平方发散，即质量修正项正比于截断能标的平方. 这显然是不可接受的. 费米子(夸克、轻子)和规范介子的质量直接或间接地与 Higgs 粒子的真空期望值有关，因而在单圈辐射修正下也是不稳定的. 引入超对称之后，Higgs 粒子质量单圈修正的平方发散将完全被抵消(费米子圈和玻色子圈的贡献相消)，从而质量的规范等级将保持，并可在任意级辐射修正下保持.

(2) 引入超对称后，三种相互作用，即强、弱、电磁相互作用的耦合常数可在大统一能标($\sim 10^{15}$ GeV)相交于一点，即可实现三种力的统一. 没有超对称的大统一模型是做不到这一点的.

(3) 超对称模型中费米子总数和玻色子总数严格相等. 每个费米子都对应着一个玻色子，反之亦然. 这从美学的角度看是非常完美的.

上面三个理由中(2)，(3)与个人的鉴赏力(taste)有关，而(1)是最主要的物理理由.

本节主要讨论最小超对称标准模型(minimal supersymmetric standard model，MSSM)，对超出 MSSM 以外的超对称模型只稍加提及.

9.2.1 最小超对称标准模型(MSSM)

最小超对称标准模型指的是 $N=1$ 的且规范群为 $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$，即标准模型的规范群的模型. 其手征超对称多重态(chiral supermultiplets)和规范超多重态(gauge supermultiplets)列于表 9.1 和表 9.2 中.

表 9.1 MSSM 中的手征超多重态

超 场		自旋为 0	自旋为 1/2	$SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y$
squarks，quarks (3 family)	Q_i	$(\tilde{U}_L, \tilde{D}_L)$	(U_L, D_L)	$(3, 2, \frac{1}{6})$
	U_i^c	$\tilde{U}_R^*$	U_R^+	$(\bar{3}, 1, -\frac{2}{3})$
	D_i^c	$\tilde{D}_R^*$	D_R^+	$(\bar{3}, 1, \frac{1}{3})$
sleptons，leptons (3 family)	L_i	$(\tilde{\nu}, \tilde{E}_L)$	(ν, E_L)	$(1, 2, -\frac{1}{2})$
	E_i^c	$\tilde{E}_R^*$	E_R^+	$(1, 1, 1)$
Higgs，Higgsinos	H_1	(H_1^0, H_1^-)	$(\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_1^-)$	$(1, 2, -\frac{1}{2})$
	H_2	H_2^+, H_2^0	$\tilde{H}_2^+, \tilde{H}_2^0$	$(1, 2, \frac{1}{2})$

表 9.2 MSSM 中的规范超多重态

超 场	自旋为 $\frac{1}{2}$	自旋为 1	$SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y$
gluino, gluon	$\tilde{g}$	g	(8,1,0)
winos, W bosons	$\widetilde{W}^{\pm}, \widetilde{W}^0$	$W^{\pm}, W^0$	(1,3,0)
bino, B boson	$\widetilde{B}^0$	B^0	(1,1,0)

最小超对称标准模型的超势(superpotential)可写为

$$W_{\text{MSSM}} = \mu H_1 H_2 + Y_{ij}^{u} Q_i H_2 U_j^c + Y_{ij}^{d} Q_i H_1 D_j^c + Y_{ij}^{l} L_i H_1 E_j^c, \tag{9.22}$$

上式是用手征超场写出来的.(参见表 9.1,9.2)

由于低能下自然界并没有显示出超对称[因为低能下至今我以没有找到超对称伴子(superpartner)],所以超对称在低能下必须破缺.

超对称的破缺是一件困难的事,破缺标度也不能太高(应在 1 TeV 左右).通常我们是唯象地放入软破缺项,即在超对称拉氏量中放入低能标的超对称破缺项以保证规范等级(gauge hierarchy)不被破坏.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{soft}} = {} & m_{3/2}^2 \sum_i |A_i|^2 + A m_{3/2} [Y_{ij}^{u} \widetilde{Q}_i h_2^* \widetilde{U}_j^c + Y_{ij}^{d} \widetilde{Q}_i h_1 \widetilde{D}_j^c \\ & + Y_{ij}^{l} \widetilde{L}_i h_1 E_j^c + h.c.] + B m_{3/2} \mu h_1 h_2 + \frac{1}{2} M (\tilde{g}_1 \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \tilde{g}_3),\end{aligned} \tag{9.23}$$

其中 A_i 代表超费米场 $\widetilde{Q}_i, \widetilde{U}_i, \widetilde{D}_i, \widetilde{L}_i, \widetilde{E}_i$ 等,h_1, h_2 是 Higgs 场,$\tilde{g}_{1,2,3}$代表 gaugino 场.(见表 9.1,9.2)

在更低能(~100 GeV),$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 进一步破缺到 $U(1)_{em}$.此时要求$\langle h_1 \rangle = v_1, \langle h_2 \rangle = v_2$ 满足

$$4m_W^2 / g^2 = v_1^2 + v_2^2, \tag{9.24}$$

$$v_2 / v_1 = \tan\beta. \tag{9.25}$$

v_1, v_2 也可以是复数,此时 v_2, v_1 的相对位相可破坏 CP 对称性.

(9.23)式软破缺项 $\mathcal{L}_{\text{soft}}$的来源有许多说法.如 $\mathcal{L}_{\text{soft}}$可以是引力诱导的,也可能是 hidden sector 的规范粒子 messenger 诱导出来的.有兴趣的读者可参阅有关文献.

9.2.2 *CP* 破坏机制

(1) 超对称模型对 K,B,D 介子系统中的 CP 破坏参数 $\epsilon_K, \epsilon'_K, \Delta m_K, \Delta m_B$,

Δm_D 等有新的贡献.这些新贡献除了 CKM 矩阵型的之外,还有 Higgs 超对称伴子 charginos 和 neutralinos 质量矩阵中出现的复位相及 gluon 的超对称伴子 glunios 质量矩阵中的复位相,以及 Higgs 多重态真空期望值(如 v_2,v_1)之间的相对位相等.这些标准模型以外的复位相对 CP 破坏参数会有修改.

(2) 中子和电子的电偶极矩 d_n,d_e 也会因(1)中的新的复位相的存在而改变,如图 9.3 所示[5].

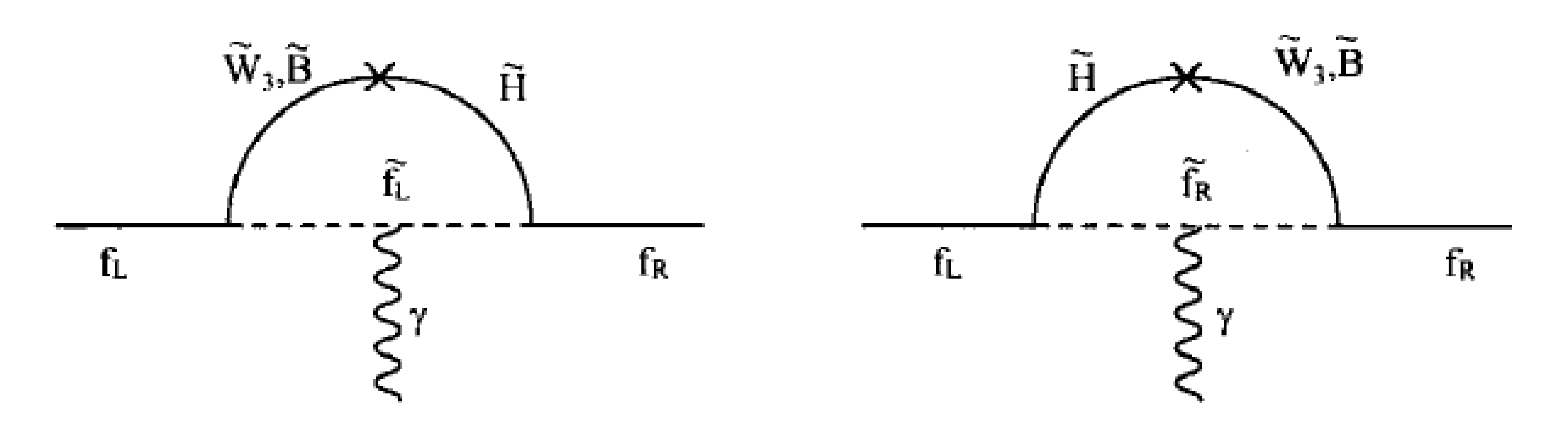


图 9.3 SUSY 理论对中子或电子 EDM 的贡献的费曼图

其中 $f_{L,R}$ 可以代表 $u_{L,R}$,$d_{L,R}$ 或 $e_{L,R}$,$\tilde{H}$ 代表 $\tilde{H}_1^0$,$\tilde{H}_2^0$.

注意,图 9.3 是味对角的跃迁.

(3) SUSY 理论对强 CP 破坏项产生影响.

在第一章我们曾提到,QCD 拉氏量会多一项,即

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}_{\text{QCD}}+\frac{\theta}{8\pi}\alpha_s F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}. \tag{9.26}$$

费米子的质量矩阵 M 在树图下是实对角矩阵,在辐射修正下将改变.我们因此须重新将其对角化,即

$$M_{\text{diag}}=U_R^+ MU_L, \tag{9.27}$$

其中 $U_{R,L}$ 为幺正变换.这将导致(9.26)式中的 θ 变为

$$\bar{\theta}=\theta+\arg[\det(U_R^+U_L)]. \tag{9.28}$$

实验上给出

$$\bar{\theta}_{\exp}\lesssim O(10^{-9}). \tag{9.29}$$

引入超对称,可保障质量矩阵 M 不受辐射修正的影响,因而保证 $\bar{\theta}$ 的稳定,即也不受辐射修正的影响.但超对称用软破缺项来实现时,我们还必须用 Peccei-Quinn 机制来保证 $\bar{\theta}$ 的稳定[6].

对超出 MSSM 的超对称模型,新的 CP 破坏机制非常丰富,但同时也变得相当复杂.要和实验对比将是一件非常繁琐的事.

以上只是简要的讨论.有志在这一领域工作的读者还必须转向原始文献.

参考文献

[1] ATLAS collaboration. Phys. Lett. B, 2012, 716: 1. CMS collaboration. Phys. Phys. Lett. B, 2012, 716: 30.

[2] Pati J C, Salam A. Phys. Rev. D, 1974, 10: 275. Mohapatra R N, Pati J C. Phys. Rev. D, 1975, 11: 566. Mohapatra R N, Pati J C. Phys. Rev. D, 1975, 11: 2558. Senjanovic G, Mohapatra R N. Phys. Rev. D, 1975, 12: 1502.

[3] Nilles N P. Phys. Rep. , 1984, 110: 1. Martin S P. arXiv:hep-th/9709356. Haber H E, Kane G L. Phys. Rep. , 1985, 117:75.

[4] Branco G C, Lavoura L, Silva J P. CP Violation. Clarendon Press, 1999. BigiI I, Sanda A I. CP Violation. Cambridge University Press, 2000.

[5] Aguila F D, Gavela M B, Grifols J A, Mendez A. Phys. Lett. , 1983, 126B: 71.

[6] Peccei R D, Quinn H R. Phys. Rev. Lett. , 1977, 38: 1440. Peccei R D, Quinn H R. Phys. Rev. D, 1977, 16: 1791.

名 词 索 引

J

K

L

M

N

P

Q

R

S

T

U

W

X

Y

Z